שיעור 13 מרחבי מכפלה פנימית

הגדרה

יהי $\mathbf{V}$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbf{R}$ או $\mathbf{C}$

מכפלה פנימית היא פעולה בינארית

$$u,v\in\mathbf{V}\rightarrow\langle u,v\rangle\in\mathbf{R} \text{ או } u,v\in\mathbf{V}\rightarrow\langle u,v\rangle\in\mathbf{C}$$

בהתאמה כך ש-

1. $0\le\langle u,u\rangle\in\mathbf{R}$ לכל $u\in\mathbf{V}$
2. $\langle u,u\rangle=0\Leftrightarrow u=0$ לכל $u\in\mathbf{V}$
3. $\langle\alpha u+\beta v,w\rangle=\alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$ לכל $u,v,w\in\mathbf{V}$ ולכל זוג סקלרים α,β
4. $\langle v,u\rangle=\overline{\langle u,v\rangle}$ לכל $u,v\in\mathbf{V}$

מרחב וקטורי בו מוגדרת מכפלה פנימית נקרא מרחב מכפלה פנימית

תרגיל 1

בדוק אילו מן הפעולות הבינאריות $u,v\in\mathbf{R}^2\rightarrow\langle u,v\rangle\in\mathbf{R}$ הבאות

מהוות מכפלה פנימית במרחב $\mathbf{R}^2$

א. $\langle u,v\rangle=x_1x_2-y_1y_2$ לכל $u=(x_1,y_1),v=(x_2,y_2)$

ב. $\langle u,v\rangle=x_1y_2+x_2y_1$ לכל $u=(x_1,y_1),v=(x_2,y_2)$

ג. $\langle u,v\rangle=x_1x_2+y_1y_2$ לכל $u=(x_1,y_1),v=(x_2,y_2)$

הגדרה

מכפלה פנימית סטנדרטית $u,v\in\mathbf{R}^n\rightarrow\langle u,v\rangle\in\mathbf{R}$ המוגדרת על ידי

$\langle u,v\rangle=u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_nv_n$ לכל $u=(u_1,u_2,..,u_n),v=(v_1,v_2,...,v_n)$

הערה

מכפלה פנימית עם משקלי הרכיבים $u,v\in\mathbf{R}^n\rightarrow\langle u,v\rangle\in\mathbf{R}$ המוגדרת על ידי

$\langle u,v\rangle=\alpha_1u_1v_1+\alpha_2u_2v_2+\ldots+\alpha_nu_nv_n$ לכל $u=(u_1,u_2,..,u_n),v=(v_1,v_2,...,v_n)$

$(u,v)=\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbf{R}$ סקלרים קבועים לדוגמא

$\langle u,v\rangle=4x_1x_2+25y_1y_2$ לכל $u=(x_1,y_1),v=(x_2,y_2)$

הגדרה

מכפלה פנימית סטנדרטית $u,v\in\mathbf{C}^n\rightarrow\langle u,v\rangle\in\mathbf{C}$ המוגדרת על ידי

$(u,v)=u_1\bar{v}_1+u_2\bar{v}_2+\ldots+u_n\bar{v}_n$ לכל $u=(u_1,u_2,..,u_n),v=(v_1,v_2,...,v_n)$

תרגיל 2

הוכח כי פעולה בינארית $u,v\in\mathbf{C}^2\rightarrow\langle u,v\rangle\in\mathbf{C}$

כך ש- $\langle u,v\rangle=x_1\bar{x}_2+y_1\bar{y}_2$ לכל $u=(x_1,y_1),v=(x_2,y_2)$

היא מכפלה פנימית במרחב $\mathbf{C}^2$

תרגיל 3

בדוק אילו מן הפעולות הבינאריות $u,v\in C[0,1]\to\langle u,v\rangle\in\mathbf{R}$ הבאות

מהוות מכפלה פנימית במרחב $C[0,1]$ - פונקציות רציפות למקוטעין בקטע $[0,1]$

א. $\langle u,v\rangle=\int_0^1 (u(x)+v(x))dx$

ב. $\langle u,v\rangle=u(0)\cdot v(0)+u(1)\cdot v(1)$

ג. $\langle u,v\rangle=\int_0^1 (u(x)\cdot v(x))dx$

הגדרה

יהי $Int[a,b]$ - מרחב הפונקציות האינטגרביליות בקטע $[a,b]$

מכפלה פנימית סטנדרטית $u,v\in Int[a,b]\to\langle u,v\rangle\in\mathbf{R}$ מוגדרת על ידי

$$(u,v)=\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)\cdot v(x)dx$$

בפרט $\langle u,v\rangle=\int_0^1 (u(x)\cdot v(x))dx$ היא מכפלה פנימית סטנדרטית ב-$C[0,1]$

תרגיל 4

הוכח כי פעולה בינארית $A,B\in\mathbf{R}^{m\times m}\to\langle A,B\rangle\in\mathbf{R}$ כך ש- $\langle A,B\rangle=trAB^t$

(העקבה של המכפלה של האחת בשחלוף של השנייה) מהוות מכפלה פנימית במרחב $\mathbf{R}^{2\times 2}$
(מטריצות ממשיות 2 על 2) מעל שדה $\mathbf{R}$

הגדרה

מכפלה פנימית סטנדרטית $A,B\in\mathbf{R}^{m\times m}\to\langle A,B\rangle\in\mathbf{R}$ מוגדרת על ידי $\langle A,B\rangle=trAB^t$ לכל 2 מטריצות

הגדרה

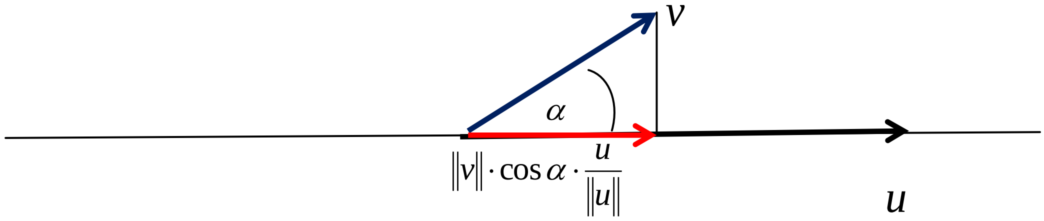
יהי $\mathbf{V}$ מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbf{R}$ או $\mathbf{C}$

פונקציה $u\to\|u\|\in\mathbf{R}_+$ המוגדרת על ידי $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$ נקראת נורמה המושרית על ידי המכפלה הפנימית

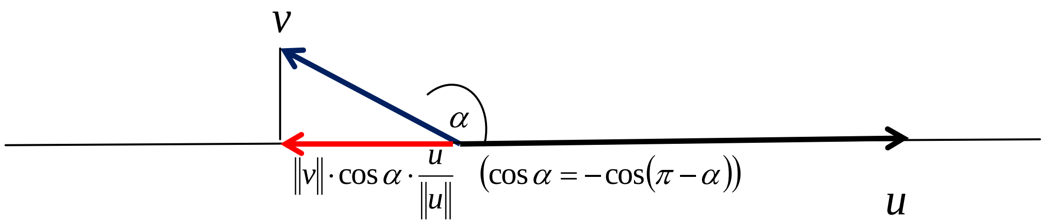
תכונות של נורמה

1. $0\le\|u\|$ לכל $u\in\mathbf{V}$
2. $\|u\|=0\Leftrightarrow u=0$ לכל $u\in\mathbf{V}$
3. $\|\alpha u\|=|\alpha|\cdot\|u\|$ לכל $u\in\mathbf{V}$ ולכל $\alpha\in\mathbf{C}$
4. $\langle u,v\rangle\le\|u\|\cdot\|v\|$ לכל $u,v\in\mathbf{V}$ (אי שוויון קושי שוורץ)
5. $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$ לכל $u,v\in\mathbf{V}$ (אי שוויון המשולש)

היטל של וקטור v על ישר במישור ($u \neq 0$ וקטור שרירותי בישר)



$$\cos\alpha = \frac{\langle v,u \rangle}{\|v\| \cdot \|u\|} \Rightarrow proj_u v = \|v\| \cdot \frac{\langle v,u \rangle}{\|v\| \cdot \|u\|} \cdot \frac{u}{\|u\|} = \frac{\langle v,u \rangle}{\|u\|^2} \cdot u$$



הערות

- v מאונך(אורתוגונאלי) ל- u אם ורק אם $\langle v,u \rangle = 0$ ואם ורק אם $proj_u v = 0$
- $w = v - proj_u v$ מאונך(אורתוגונאלי) ל- v ולכן נקרא המשלים האורתוגונאלי של ההיטל $proj_u v$ ל- v

הגדרה

- יהי $\mathbf{V}$ מרחב מכפלה פנימית. וקטורים $u,v \in \mathbf{V}$ נקראים אורתוגונאליים זה לזה במידה ו- $\langle u,v \rangle = 0$
- קבוצה של וקטורים $\{u_1,u_2,..,u_k\}$ במרחב מכפלה פנימית נקראת אורתוגונאלית אם $\langle u_i,u_j \rangle = 0$ לכל $i \neq j = 1,2,...,k$
- קבוצה אורתוגונאלית של וקטורים $\{u_1,u_2,..,u_k\}$ במרחב מכפלה פנימית נקראת אורתונורמאלית אם $\|u_i\| = 1$ לכל $i = 1,2,...,k$
- בסיס למרחב מכפלה פנימית המהווה קבוצה אורתוגונאלית(אורתונורמאלית) נקרא בסיס אורתוגונאלי(אורתונורמאלי)

הגדרה (במרחב כללי)

ההיטל (ההיטל האורתוגונאלי) של וקטור v על וקטור u הוא $proj_u v = \frac{\langle v,u \rangle}{\|u\|^2} \cdot u$

ההיטל (ההיטל האורתוגונאלי) של וקטור v על תת מרחב $\mathbf{W}$ הוא

$$proj_{\mathbf{W}} v = \frac{\langle v,u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 + \frac{\langle v,u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 + ... + \frac{\langle v,u_k \rangle}{\|u_k\|^2} \cdot u_k$$

כאשר $\{u_1,u_2,..,u_k\}$ - בסיס אורתוגונאלי של $\mathbf{W}$

משפט (אי שוויון בסל)

תהי $\{u_1,u_2,..,u_k\}$ קבוצה אורתונורמאלית במרחב מכפלה פנימית $\mathbf{V}$ אזי לכל $v\in\mathbf{V}$ מתקיים $\left|\langle v,u_1\rangle\right|^2+\left|\langle v,u_2\rangle\right|^2+\ldots+\left|\langle v,u_k\rangle\right|^2\le\|v\|^2$

משפט (עליו מבוסס תהליך גרהם-שמידט)

יהי $\{u_1,u_2,..,u_k\}$ בסיס אורתוגונאלי של תת מרחב $\mathbf{W}$ של מרחב מכפלה פנימית $\mathbf{V}$. אזי $v-proj_vW=v-\frac{\langle v,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\cdot u_1-\frac{\langle v,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}\cdot u_2-\ldots-\frac{\langle v,u_k\rangle}{\|u_k\|^2}\cdot u_k$ אורתוגונאלי ל- $\mathbf{W}$ לכל וקטור $v\in\mathbf{V}$ (לכל $w\in\mathbf{W}$ מתקיים $\langle v-proj_vW,w\rangle=0$)

הגדרה

המרחק בין וקטור v לתת מרחב $\mathbf{W}$ הוא $d_{\mathbf{W}}v=\|v-proj_{\mathbf{W}}v\|$

כאשר $\{u_1,u_2,..,u_k\}$ - בסיס אורתוגונאלי של $\mathbf{W}$

תרגיל 5

א) חשב מרחק d_uv בין $v=(1,1,1)$ ל- $u=(0,-1,2)$

ב) חשב מרחק d_uv בין $u=(0,-1,2)$ ל- $v=(1,1,1)$

ג) חשב מרחק $d_{\mathbf{W}}v$ בין $v=(1,1,1)$ ל- $\mathbf{W}=Span\{(0,-1,2),(0,0,1)\}$

תהליך גרהם-שמידט

יהי $\{u_1, u_2, .., u_k\}$ בסיס לתת מרחב $\mathbf{W}$ של מרחב מכפלה פנימית $\mathbf{V}$

אזי הקבוצה $\{w_1, w_2, .., w_k\}$ מהווה בסיס אורתוגונאלי לתת מרחב $\mathbf{W}$

$$w_1 = u_1$$

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1$$

$$w_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1 - \frac{\langle u_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot w_2$$

$$\ldots$$

$$w_k = u_k - \frac{\langle u_k, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1 - \frac{\langle u_k, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot w_2 - \ldots - \frac{\langle u_k, w_{k-1}\rangle}{\|w_{k-1}\|^2}\cdot w_{k-1}$$

והקבוצה $\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, .., \frac{w_k}{\|w_k\|}\right\}$ מהווה בסיס אורתונורמאלי לתת מרחב $\mathbf{W}$

גרסה אורתונורמאלית של תהליך גרהם-שמידט

(פחות נוחה לחישוב מהגרסה הקודמת מפני שבד"כ כרוכה בחישובים עם שברים)

יהי $\{u_1, u_2, .., u_k\}$ בסיס לתת מרחב $\mathbf{W}$ של מרחב מכפלה פנימית $\mathbf{V}$

אזי הקבוצה $\{w_1, w_2, .., w_k\}$ מהווה בסיס אורתונורמאלי לתת מרחב $\mathbf{W}$

$$w_1 = u_1 \quad w_1^* = \frac{w_1}{\|w_1\|}$$

$$w_2 = u_2 - \langle u_2, w_1^*\rangle\cdot w_1^* \quad w_2^* = \frac{w_2}{\|w_2\|}$$

$$w_3 = u_3 - \langle u_3, w_1^*\rangle\cdot w_1^* - \langle u_3, w_2^*\rangle\cdot w_2^* \qquad w_3^* = \frac{w_3}{\|w_3\|}$$

$$\ldots$$

$$w_k = u_k - \langle\ \rangle(u_k, w_1^*)\cdot w_1^* - \langle\ \rangle(u_k, w_2^*)\cdot w_2^* - \ldots - \langle\ \rangle(u_k, w_{k-1}^*)\cdot w_{k-1}^* \qquad w_k^* = \frac{w_k}{\|w_k\|}$$

דוגמה

$$\mathbf{W}=Span\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$w_1=u_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad \langle u_2,w_1\rangle=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=1\qquad \|w_1\|^2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=2$$

$$w_2=u_2-\frac{\langle u_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}\qquad new\,w_2=2w_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\langle u_3,w_1\rangle=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=2\qquad \langle u_3,w_2\rangle=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}=2\qquad \|w_2\|^2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}=6$$

$$w_3=u_3-\frac{\langle u_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1-\frac{\langle u_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot w_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}\qquad new\,w_3=3w_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

בסיס אורתוגונאלי ל- $\mathbf{W}$ הוא $\left\{w_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},w_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},w_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$ $\left(\langle w_1,w_2\rangle=\langle w_1,w_3\rangle=\langle w_2,w_3\rangle=0\right)$

בסיס אורתונורמאלי ל- $\mathbf{W}$ הוא $\left\{w_1^*=\frac{w_1}{\|w_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},w_2^*=\frac{w_2}{\|w_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},w_3^*=\frac{w_3}{\|w_3\|}=\frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$

הגדרה

יהי $\mathbf{W}$ תת מרחב של מרחב מכפלה פנימית $\mathbf{V}$

המשלים האורתוגונאלי $\mathbf{W}^\perp$ לתת מרחב $\mathbf{W}$ הוא קבוצת הוקטורים האורתוגונאליים ל- $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W}^\perp=\{w\in\mathbf{V}:\langle w,v\rangle=0,v\in\mathbf{W}\}$$

משפט

יהי $\mathbf{W}$ תת מרחב של מרחב מכפלה פנימית $\mathbf{V}$. אזי

א. $\mathbf{W}^\perp$ אף הוא תת מרחב של $\mathbf{V}$

ב. $\mathbf{W}\oplus\mathbf{W}^\perp=\mathbf{V}$ ולכן $\mathbf{W}\cap\mathbf{W}^\perp=\{0\}$ ו- $\dim\mathbf{W}+\dim\mathbf{W}^\perp=\dim\mathbf{V}$

ג. $\left(\mathbf{W}^\perp\right)^\perp=\mathbf{W}$

ד. לכל מטריצה $A_{m\times n}$ מעל שדה $\mathbf{F}$ מתקיים $NulA=(RowA)^\perp$ $\qquad RowA=(NulA)^\perp$

תרגיל 6

נתון
$$\mathbf{W}=Span\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצא בסיס ומימד ל- $\mathbf{W}^{\perp}$

ב. הגדר מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות כך של פתרונה הכללי יהיה $\mathbf{W}$

פתרון

תהי $A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\2&-2&1&1&3\end{pmatrix}$. אזי $\mathbf{W}=RowA$ ולכן $\mathbf{W}^{\perp}=NulA$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\2&-2&1&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[-2R1+R2]{}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&0&-1&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-R2]{R2+R1}\begin{pmatrix}1&-1&0&2&2\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix}$$

$$NulA=\left\{\begin{pmatrix}x_1=x_2-2x_4-2x_5\\x_2\in\mathbf{R}\\x_3=3x_4+x_5\\x_4\in\mathbf{R}\\x_5\in\mathbf{R}\end{pmatrix}\right\}=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

תשובות

א. בסיס ל- $\mathbf{W}^{\perp}$ הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ו- $\dim\mathbf{W}^{\perp}=3$

ב. $RowA^{\perp}=\mathbf{W}^{\perp}$ כאשר $A^{\perp}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\-2&0&3&1&0\\-2&0&1&0&1\end{pmatrix}$ לכן המערכת המבוקשת היא

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\-2x_1+3x_3+x_4=0\\-2x_1+x_3+x_5=0\end{cases}$$