שיעור 12 לכסון של מטריצות ואופרטורים ליניאריים

בכל ההגדרות ומשפטים הבאים $\mathbf{V}$ הוא מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbf{F}$ כאשר $\dim \mathbf{V} = n$ ו- $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ - הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{V}$

הגדרה 1

יהי ו $T_1 : V \mapsto V$ ו- $T_2 : V \mapsto V$ 2 אופרטורים ליניאריים

האופרטור המורכב $T = T_2 \circ T_1$ הנו האופרטור $T : V \mapsto V$ כך שלכל $\bar{u} \in V$ מתקיים $T\bar{u} = T_2 \circ T_1(\bar{u}) = T_2(T_1\bar{u})$

משפט 1

יהי $\bar{v} \in V$ ויהיו $T_1 : V \mapsto V$ ו- $T_2 : V \mapsto V$ שני אופרטורים ליניאריים המוגדרים באמצעות מטריצות $A_1 = [T_1]_E$ ו- $A_2 = [T_2]_E$ בהתאמה . אזי המטריצה $A = A_2 \cdot A_1$ היא מטריצת האופרטור המורכב $T = T_2 \circ T_1$, כלומר לכל וקטור $\bar{u} \in V$ מתקיים $[T\bar{u}]_E = A \cdot [\bar{u}]_E = A_2 \cdot A_1 \cdot [\bar{u}]_E$

דוגמאות

1. במרחב $\mathbf{R}^2$ נתונים 2 האופרטורים

$$T_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ -ו } T_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

הגדר את $T = T_2 \circ T_1$ ואת $S = T_1 \circ T_2$

פתרון

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

הן מטריצות של אופרטורים T_2, T_1 בהתאמה לכן

$A = A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 23 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$ היא מטריצה של $T = T_2 \circ T_1$

$B = A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 25 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}$ היא מטריצה של $S = T_1 \circ T_2$

הערה - ניתן לראות כי $A \neq B$ ולכן $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$

2. במרחב $\mathbf{R}^2$ נתונים 2 האופרטורים

$$T_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \text{ ו- } T_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

הגדר את $T=T_2\circ T_1$ ואת $S=T_1\circ T_2$

פתרון

$$A_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$$

הן מטריצות של אופרטורים T_1,T_2 בהתאמה לכן

$A=A_2\cdot A_1=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&24\end{pmatrix}$ היא מטריצה של $T=T_2\circ T_1$

$B=A_1\cdot A_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&24\end{pmatrix}$ היא מטריצה של $S=T_1\circ T_2$

הערה

מטריצות אלכסוניות מתחלפות - $A_1\cdot A_2=A_2\cdot A_1$ ולכן $T_1\circ T_2=T_2\circ T_1$

הגדרה 2

יהי $T:V\mapsto V$ - אופרטור ליניארי . החזקה של האופרטור

$T^m:V\mapsto V$ $(m\in N)$ מוגדרת כאופרטור מורכב $T^m=\underbrace{T\circ T\circ\ldots\circ T}_{m \text{ פעמים}}$

הגדרה 3

אם אופרטור ליניארי $T:V\mapsto V$ הפיך (חד-חד ערכי ועל) אז האופרטור $T^{-1}:V\mapsto V$ כך שלכל וקטור $\bar{u}\in V$ מתקיים $T^{-1}\bar{u}=\bar{w}$ אם ורק אם $\bar{w}=T\bar{u}$ נקרא האופרטור ההופכי ל- T

משפט 2

יהי $T:V\mapsto V$ אופרטור ליניארי ותהי $A=[T]_E$. אזי

א. מטריצת אופרטור החזקה $T^m:V\mapsto V$ $(m\in N)$ היא $[T^m]_E=A^m$,

ב. אופרטור T הפיך אם ורק אם מטריצה A הפיכה - $[T^{-1}]_E=A^{-1}$

דוגמא 3

במרחב $\mathbf{R}^2$ נתון אופרטור ליניארי $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

מצא את המטריצה של האופרטורים T^2, T^2, T^{-1}, T^{-2}

פתרון

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ היא המטריצה של T לכן

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -21 \\ -21 & 34 \end{pmatrix}$ היא המטריצה של T^2

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 13 & -21 \\ -21 & 34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 & -144 \\ -144 & 233 \end{pmatrix}$ היא המטריצה של T^3

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ היא המטריצה של T^{-1}

$A^{-2} = A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 21 \\ 21 & 13 \end{pmatrix}$ היא המטריצה של T^{-2}

הערה - ניתן להראות כי $A^{-2} = \left(A^2\right)^{-1}$ ולכן $T^{-2} = \left(T^2\right)^{-1}$

ובכלל $\left(T^n\right)^m = \left(T^m\right)^n$ לכל $m,n \in \mathbf{Z}$

דוגמא 4

במרחב $\mathbf{R}^2$ נתון אופרטור ליניארי $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

א. מצא את המטריצה של האופרטורים $T^2, T^2, T^{-1}, T^{2013}$

ב. מצא את כל הפתרונות למשוואה $S^2 = T$

(את כל האופרטורים הליניאריים S המקיימים $S \circ S = T$)

פתרון

א. $A = [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ לכן $A^2 = [T^2]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

$$A^3 = [T^3]_E = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = [T^{-1}]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1^{-1} & 0 \\ 0 & 4^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^{2013} = [T^{2013}]_E = \begin{pmatrix} 1^{2013} & 0 \\ 0 & 4^{2013} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{4026} \end{pmatrix}$$

ב. פתרונות המשוואה $\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

הם $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

הערה - בחישוב של הרכבות , חזקות ושורשים של מטריצות אלכסוני ות מספיק לבצע את הפעולות הללו על איברי האלכסון

הגדרה 4

מטריצה אלכסונית $A_{n\times n} = (a_{ij})$ היא מטריצה ריבועית בה כל הרכיבי ם מחוץ לאלכסון הראשי שווים לאפס : $a_{ij} = 0$ לכל $i \neq j$, לדוגמא

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חישוב של הרכבות , חזקות ושורשים של אופרטורים כלליים אף הוא מסתמך על חישוב חזקות ושורשים של מטריצות אלכסוני ות

הרעיון – אם מטריצ ה שמייצגת את האופרטור בבסיס סטנדרטי אינה אלכסוני ות נחפש בסיס אחר בו ההצגה של האופרטור כן תהיה אלכסונית !

דוגמא 5

במרחב $\mathbf{R}^2$ נתון אופרטור ליניארי $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-6\\3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

א. מצא בסיס $B=\{v_1,v_2\}$ של $\mathbf{R}^2$ כך שהמטריצה המייצגת את האופרטור בבסיס B תהיה אלכסונית - $[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$

ב. מצא את המטריצה של T^{2013} ומטריצה של אחד האופרטורים S המקיימים את השוויון $S^2=T$

פתרון

א. לפי ההגדרה של $[T]_B$ לכל $\bar{u}\in R^n$ מתקיים $[T\bar{u}]_B=[T]_B\cdot[\bar{u}]_B$

בפרט $[Tv_1]_B=[T]_B\cdot[v_1]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\end{pmatrix}$ ($v_1=1\cdot v_1+0\cdot v_2$ לכן $[v_1]_B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$)

מהשוויון $[Tv_1]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\end{pmatrix}$ נובע $Tv_1=\lambda_1\cdot v_1$, באופן דומה $Tv_2=\lambda_2\cdot v_2$

הגדרה 5

במרחב $\mathbf{F}^n$ מעל שדה $\mathbf{F}$ מוגדר אופרטור ליניארי T

באמצעות מטריצה A: $T\bar{u}=A\bar{u}$ לכל $\bar{u}\in\mathbf{F}^n$

סקלר $\lambda\in\mathbf{F}$ נקרא ערך עצמי של אופרטור T (ושל מטריצה A)

ווקטור $\bar{v}\neq\bar{0}$ נקרא וקטור עצמי של אופרטור T (ושל מטריצה A)

המתאים לערך עצמי λ אם מתקיים $T\bar{v}=A\bar{v}=\lambda\bar{v}$

נחזור לדוגמא 5 ונמצא את כל הערכים והוקטורים העצמיים של מטריצה A – נפתור את המשוואה $A\bar{v}=\lambda\bar{v}$

$$\begin{pmatrix}-2&-6\\3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

נעביר את כל הגורמים במשוואה לאגף שמאל

$$\begin{pmatrix}-2&-6\\3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

נשלב במשוואה את מטריצת היחידה

$$\begin{pmatrix}-2&-6\\3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2&-6\\3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}&0\\0&\boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

נוציא גורם משותף (עפ"י חוק הפילוג בכפל מטריצות)

$$\left[\begin{pmatrix}-2&-6\\3&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

ונקבל את המשוואה

$$\begin{pmatrix}-2-\lambda&-6\\3&7-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

למשוואה $\begin{pmatrix}-2-\lambda & -6\\ 3 & 7-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ ישנם 2 מצבי הפתרון :

1 - הפתרון היחיד $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ במידה ו- $\begin{vmatrix}-2-\lambda & -6\\ 3 & 7-\lambda\end{vmatrix}\neq 0$

מצב זה לא מועיל מכיוון ש- $\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ לא יכול להיות וקטור בבסיס

2 – אינסוף פתרונות במידה ו- $\begin{vmatrix}-2-\lambda & -6\\ 3 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & -6\\ 3 & 7-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)(7-\lambda)+6\cdot 3=\lambda^2-5\lambda+4=0$$

לכן $\lambda_1=1$ ו- $\lambda_2=4$ הם כל הערכים העצמיים של המטריצה

נשאר למצוא בסיס $B=\{v_1,v_2\}$ ואז $D=[T]_B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

נציב במשוואה $\begin{pmatrix}-2-\lambda & -6\\ 3 & 7-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ את הערך $\lambda_1=1$:

$$\begin{pmatrix}-2-1 & -6\\ 3 & 7-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי למערכת הזאת הנו $\left\{\begin{pmatrix}-2x_2\\ x_2\end{pmatrix}\middle| x_2\in R\right\}=Span\left\{\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\right\}$

נגדיר $v_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ בתור וקטור עצמי המתאים לערך עצמי $\lambda_1=1$

נציב במשוואה $\begin{pmatrix}-2-\lambda & -6\\ 3 & 7-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ את הערך $\lambda_2=4$:

$$\begin{pmatrix}-2-4 & -6\\ 3 & 7-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-6 & -6\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי למערכת הזאת הנו $\left\{\begin{pmatrix}-x_2\\ x_2\end{pmatrix}\middle| x_2\in R\right\}=Span\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$

נגדיר $v_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ בתור וקטור עצמי המתאים לערך עצמי $\lambda_2=1$

אזי בבסיס $B=\left\{v_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ נקבל $D=[T]_B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

הערה - קביעת הבסיס הנ"ל אינה חד משמעית – קיימים אינסוף בסיסים נוספים בהם מטריצת האופרטור אף היא תהיה אלכסונית

למשל עבור בסיס $C=\left\{\bar{c}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, \bar{c}_2=\begin{pmatrix}20\\ -10\end{pmatrix}\right\}$ נקבל $[T]_C=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

ב. נתבונן במשוואת הצגת האופרטור בבסיס לא סטנדרטי

$$[T]_B=[I]_B^E\cdot[T]_E\cdot[I]_E^B$$

כאשר $[T]_B$ - מטריצת האופרטור T בבסיס $B=\left\{v_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$[T]_E$ - מטריצת האופרטור T בבסיס $E=\left\{\bar{e}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \bar{e}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$[I]_E^B$ - מטריצת המעבר מ- B ל- E, $[I]_B^E$ - מטריצת המעבר מ- E ל- B

אם נסמן $[I]_E^B=(\bar{b}_1\,\bar{b}_2)=P$, $[T]_B=D$, $[T]_E=A$

המשוואה $[T]_B=[I]_B^E\cdot[T]_E\cdot[I]_E^B$ תהפוך ל- $D=P^{-1}\cdot A\cdot P$

הנקראת משוואת לכסון מטריצה

הגדרה 6

מטריצה ריבועית $A_{n\times n}$ נקראת ניתנת ללכסון או לכסינה במידה וקיימת מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P (הנקראת מטריצה מלכסנת) כך שמתקיים השוויון $D=P^{-1}\cdot A\cdot P$

משפט 3

א. מטריצה ריבועית $A_{n\times n}$ עם מקדמים משדה $\mathbf{F}$ לכסינה אם ורק אם קיים בסיס $B=\{v_1, v_2,...,v_n\}$ של $\mathbf{F}^n$ בו כל הוקטורים הם וקטורים עצמיים של המטריצה A (המתאימים לערכים עצמיים $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_n$ של A)

ב. מטריצה אלכסונית D ומטריצה מלכסנת P המקיימות את השוויון

$$D=P^{-1}\cdot A\cdot P$$

כאשר עמודותיה של P הן וקטורים עצמיים ואיברי האלכסון של D הם הערכים העצמיים של מטריצה A המסודרים באותו הסדר

$$P=\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & ... & v_n\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_n\end{pmatrix}$$

בסעיף ב' של השאלה מבקשים לחשב את A^{2013}

נכפיל את השוויון $D=P^{-1}\cdot A\cdot P$ ב- P,P^{-1} משני הצדדים

$$P\cdot D\cdot P^{-1}=P\cdot\left(P^{-1}\cdot A\cdot P\right)\cdot P^{-1}$$

$$P\cdot D\cdot P^{-1}=\left(P\cdot P^{-1}\right)\cdot A\cdot\left(P\cdot P^{-1}\right)$$

$$P\cdot D\cdot P^{-1}=I\cdot A\cdot I$$

$$A=P\cdot D\cdot P^{-1}$$

מכאן

$$A^{2013}=\left(P\cdot D\cdot P^{-1}\right)^{2013}=\underbrace{\left(P\cdot D\cdot P^{-1}\right)\left(P\cdot D\cdot P^{-1}\right)\ldots\left(P\cdot D\cdot P^{-1}\right)}_{\text{פעמים }2013}=$$

$$=P\cdot D\cdot\left(P^{-1}P\right)\cdot D\cdot(P^{-1}\ldots P)\cdot D\cdot P^{-1}=P\cdot D\cdot I\cdot D\cdot I\ldots I\cdot D\cdot P^{-1}=P\cdot D^{2013}\cdot P^{-1}$$

$$A^{2013}=\begin{pmatrix}-2&-6\\3&7\end{pmatrix}^{2013}=P\cdot D^{2013}\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}^{2013}\cdot\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1^{2013}&0\\0&4^{2013}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2^{4026}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}$$

לאחר החישוב נקבל $A^{2013}=\begin{pmatrix}2&2-2^{4026}\\-1+2^{4026}&-1+2^{4027}\end{pmatrix}$

ניעזר שוב בשוויון $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$ על מנת לפתור את המשוואה $S^2=T$

נניח קיים אופרטור S כזה, נסמן $[S]_E=M$, אזי $M^2=A$

נתבונן בשוויון

$$M^2=A=P\cdot D\cdot P^{-1}=P\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\cdot P^{-1}=P\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^2\cdot P^{-1}=\left[P\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\right]^2$$

השוויון הזה יהיה נכון כאשר למשל

$$M=P\cdot\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}$$

נבדוק זאת

$$M^2=\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-6\\3&7\end{pmatrix}=A$$

הערה - ישנן 3 מטריצות נוספות המקיימות את השוויון $M^2=A$

$P\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$, $P\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$ ו- $P\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\0&-2\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$

ולכן 3 פתרונות נוספים למשוואה $S^2=T$

דוגמא 6

בדוק האם מטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}$ *לכסינה ובמידה וכן – לכסן אותה*

פתרון

השאלה שקולה לשאלה – האם ניתן להגדיר בסיס $B=\{v_1,v_2\}$ *של* $\mathbf{R}^2$

כך שהמטריצה המייצגת את האופרטור $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

בבסיס B *תהיה אלכסונית*

נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\-1&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)+1=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$$

לכן למטריצה ישנו ערך עצמי $\lambda=2$ *בלבד (שורש כפול של משוואה ריבועי ת)*

נמצא את הוקטורים העצמיים המתאימים לערך עצמי $\lambda=2$

$$\begin{pmatrix}1-2&1\\-1&3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\x_2\in R\end{cases}$$

והפתרון הכללי של המשוואה הנו $Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

מכיוון ש- $\dim Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=1$ *לא ניתן להגדיר את הבסיס* $B=\{v_1,v_2\}$

המכיל רק וקטורים עצמיים של המטריצה

(כל זוג וקטורים עצמיים יהיה תלוי ליניארי)

לכן מטריצה A *אינה לכסינה*

משפט 4

תהי $A_{2\times 2}$ *- מטריצה ריבועית*

λ_1,λ_2 *-הערכים העצמיים שלה*

א. אם $\lambda_1\neq\lambda_2$ *אז* A *בהכרח לכסינה*

ב. אם $\lambda_1=\lambda_2$ *ו-* A *אינה אלכסונית אז* A *בהכרח אינה לכסינה*

(כל מטריצה אלכסונית לכסינה והמטריצה המלכסנת אותה היא מטריצת היחידה)

דוגמא 7

בדוק האם מטריצה $A=\begin{pmatrix}1&3&3\\-3&-5&-3\\3&3&1\end{pmatrix}$ לכסינה , במידה וכן – לכסן אותה

פתרון

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&3&3\\-3&-5-\lambda&-3\\3&3&1-\lambda\end{vmatrix}R3+R2=\begin{vmatrix}1-\lambda&3&3\\0&-2-\lambda&-2-\lambda\\3&3&1-\lambda\end{vmatrix}R2/(-2-\lambda)=$$

$$=(-2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&3&3\\0&1&1\\3&3&1-\lambda\end{vmatrix}\begin{matrix}-3R2+R1\\-3R2+R3\end{matrix}=-(\lambda+2)\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1&1\\3&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$-(\lambda+2)(1-\lambda)(-2-\lambda)==(\lambda+2)^2(1-\lambda)=0$$

למטריצה A יש 2 ערכים עצמיים שונים - $\lambda_1=1$ - שורש יחיד ו- $\lambda_2=-2$ - שורש כפול (ריבוי ו= 2 בפירוק הפולינום)

הגדרה 7

תהי $A_{n\times n}$ - מטריצה ריבועית ו- λ - ערך עצמי שלה

החזקה p_λ של הגורם עם λ בפירוק המכוסם של

הפולינום האופייני $\det(A-\lambda I)$

נקראת הריבוי האלגברי של הערך העצמי λ

(בדוגמא הריבוי האלגברי של $\lambda_1=1$ היה $p_1=1$ ושל $\lambda_2=-2$ - $p_2=2$)

הגדרה 8

תהי $A_{n\times n}$ - מטריצה ריבועית ו- λ - ערך עצמי שלה

הפתרון הכללי למשוואה הומוגנית $V_\lambda=\{\bar{v}:(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0}\}$

נקרא המרחב העצמי של λ

על מנת להדיר את המרחב העצמי של $\lambda_1=1$ נציב את הערך $\lambda_1=1$ במשוואה $(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0}$:

$$\begin{pmatrix}1-1&3&3\\-3&-5-1&-3\\3&3&1-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&3&3\\-3&-6&-3\\3&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3\\x_3\in R\end{cases}\Rightarrow V_1=Span\left\{\bar{b}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

V_1 מהווה תת- מרחב ממימד 1 של R^3 עם בסיס $\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

על מנת להדיר את המרחב העצמי של $\lambda_2=-2$ נציב את הערך $\lambda_2=-2$ במשוואה $(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 3 & 3 \\ -3 & -5+2 & -3 \\ 3 & 3 & 1+2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=(0)\Rightarrow\begin{cases} x_1=-x_2-x_3 \\ x_2\in R \\ x_3\in R \end{cases}\Rightarrow V_{-2}=Span\left\{v_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

מהווה תת-מרחב ממימד 2 של V_{-2} עם בסיס $\left\{v_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

הגדרה 9

תהי $A_{n\times n}$ - מטריצה ריבועית , λ - ערך עצמי שלה ו- V_λ - המרחב העצמי של λ . המימד של המרחב העצמי $\dim V_\lambda$ נקרא הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי λ

(בדוגמא הריבויים הגיאומטריים $\dim V_1=1$ ו- $\dim V_{-2}=2$)

משפט 5

תהי $A_{n\times n}$ - מטריצה ריבועית

א. A לכסינה אם רק אם לכל ערך עצמי λ של A ריבויו האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי , כלומר $\dim V_\lambda=p_\lambda$,

ב. במידה ו- A לכסינה קבוצת עמודותיה של המטריצה המלכסנת P מהווה איחוד של כל הבסיסים של כל המרחבים העצמיים של המטריצה A

ג. לכל ערך עצמי $1\le\dim V_\lambda\le p_\lambda$ מתקיים $1\le\dim V_\lambda\le p_\lambda$, בפרט אם $p_\lambda=1$ אז $\dim V_\lambda=1$

ד. במידה ולמטריצה אין ערכים עצמיים מרובים , כלומר $p_\lambda=1$ לכל ערך עצמי λ המטריצה בהכרח לכסינה

ה. במידה ולמטריצה קיים ערך עצמי λ עבורו $\dim V_\lambda<p_\lambda$ המטריצה בהכרח אינה לכסינה

נחזור לדוגמא 7

מצאנו כי $\lambda_1=1$, $p_1=1$, $V_1=Span\left\{\bar{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\dim V_1=p_1=1$

$\lambda_2=-2$, $p_2=2$, $V_{-2}=Span\left\{\bar{b}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\bar{b}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\dim V_{-2}=p_2=2$

לכן המטריצה A לכסינה , המטריצה האלכסונית D והמטריצה המלכסנת P שלה הן

$$P=\begin{pmatrix}\bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

הער ה - ישנן אינסוף תשובות נוספות כגון

$$P=\begin{pmatrix}-2\bar{b}_2 & 5\bar{b}_1 & \bar{b}_2+\bar{b}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5 & -2\\ -2 & -5 & 1\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

דוגמא 8

בדוק האם מטריצה $A=\begin{pmatrix}4 & -9 & 5\\ 0 & 7 & -6\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ לכסינה , במידה וכן – לכסן אותה

פתרון

נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה

$$\det\begin{pmatrix}4-\lambda & -9 & 5\\ 0 & 7-\lambda & -6\\ 0 & 0 & 4-\lambda\end{pmatrix}=(4-\lambda)^2(7-\lambda)=0$$

למטריצה A יש 2 ערכים עצמיים שונים - $\lambda_1=4$ - שורש כפול $(p_4=2)$ ו- $\lambda_2=7$ - שור ש יחיד $(p_7=1)$. על מנת לקבוע האם A לכסינה מספיק לבדוק את המרחב העצמי של $\lambda_1=4$:

$$\begin{pmatrix}4-4 & -9 & 5\\ 0 & 7-4 & -6\\ 0 & 0 & 4-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & -9 & 5\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1\in R\\ x_2=0\\ x_3=0\end{cases}$$

והפתרון הכללי של המשוואה הנו $V_4=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, מכיוון ש-

$\dim V_4=1<p_4$ המטריצה A אינה לכסינה

דוגמא 9

עבור מטריצה $A_{9\times9}$ ידוע כי $\det(A-\lambda I)=(1+\lambda)^2(1-\lambda)^5(8-\lambda)(7+\lambda)$

א. בנוסף ידוע כי $\dim V_1=4$, האם A לכסינה ?

ב. מה התנאי לכך ש- A לכסינה .

תשובה

א. מטריצה A אינה לכסינה , מספיק כי לאחד הערכים העצמיים שלה הריבוי הגיאומטרי קטן מהריבוי האלגברי ,

ב. מטריצה A לכסינה אם ורק אם $\dim V_1=5$ ו- $\dim V_{-1}=2$

(ניתן לקבוע מראש כי $\dim V_8=\dim V_{-7}=p_{-8}=p_7=1$)

דוגמא 10

עבור אלו ערכי k מטריצה $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&k\end{pmatrix}$ לכסינה ?

פתרון

נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה

$$\det\begin{pmatrix}2-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&1\\0&0&k-\lambda\end{pmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)(k-\lambda)=0$$

למטריצה A יש 3 ערכים עצמיים $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$ ו- $\lambda_3=k$
במידה ו- $k\neq 1, k\neq 2$ למטריצה אין ערכי ם עצמיים מרובים ולכן היא
לכסינה . נבדוק את המקרה של $k=1$, נציב את הערך : $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

נבדוק את המרח ב העצמי של $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix}2-1&0&0\\0&1-1&1\\0&0&1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2\in R\\x_3=0\end{cases}$$

והפתרון הכללי של המשוואה הנו $V_1=Span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

מכיוון ש- $\dim V_1=1<p_1=2$ המטריצה A אינה לכסינה

נבדוק את המקרה של $k=2$, נציב את הערך במטריצה : $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

נבדוק את המרחב העצמי של $\lambda=2$

$$\begin{pmatrix}2-2&0&0\\0&1-2&1\\0&0&2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1\in R\\x_2=x_3\\x_3\in R\end{cases}$$

והפתרון הכללי של המשוואה הנו $V_2=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, מכיוון ש-
$\dim V_2=2=p_2=2$ המטריצה A לכסינה .

תשובה - מטריצה A לכסינה כאשר $k\neq 1$.

תרגילים

1. נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

א. בדוק האם היא לכסינה , במידה וכן – לכסן אותה

ב. חשב את A^{2005} ופתור את המשוואה $B^3=A$

2 נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

בדוק האם היא לכסינה , במידה וכן – לכסן אותה

3. נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

בדוק האם היא לכסינה , במידה וכן – לכסן אותה

4. נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

בדוק האם היא לכסינה , במידה וכן – לכסן אותה

5. נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

בדוק האם היא לכסינה , במידה וכן – לכסן אותה

פתרונות

1. א. נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה

$$\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 6 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-2-\lambda)+12 = \lambda^2-3\lambda+2 = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

בשלב זה ניתן לקבוע כי A לכסינה (אין לה ערכים עצמיים מרובים)

נמצא את הוקטורים העצמיים המתאימים לערך עצמי $\lambda_1=1$

$$\begin{pmatrix} 5-1 & 6 \\ -2 & -2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = -3x_2 \\ x_2 \in R \end{cases}$$

והפתרון הכללי של המשוואה הנו $V_1 = Span\left\{\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

נמצא את הוקטורים העצמיים המתאימים לערך עצמי $\lambda_2=2$

$$\begin{pmatrix} 5-2 & 6 \\ -2 & -2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 \in R \end{cases}$$

והפתרון הכללי של המשוואה הנו $V_2 = Span\left\{\bar{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

המטריצה A לכסינה , המטריצה האלכסונית D והמטריצה המלכסנת P שלה הן , למשל

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ו- $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

ב. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^{2005} = PD^{2005}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{2005}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2^{2005} & -6+6\cdot 2^{2005} \\ 2-2^{2005} & 4-3\cdot 2^{2005} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3+\sqrt[3]{2} & -6+6\cdot\sqrt[3]{2} \\ 2-\sqrt[3]{2} & 4-3\cdot\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$$

2. *נחשב את הערכים העצמיים של המטריצה*

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ -2 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)=0$$

למטריצה A *יש 2 ערכים עצמיים שונים* $\lambda_1=1$ *,* $\lambda_2=2$ *,* $\lambda_3=-1$

בשלב זה ניתן לקבוע כי A *לכסינה (אין לה ערכים עצמיים מרובים)*

נגדיר את המרחב העצמי של $\lambda_1=1$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=0\\ x_3\in R\end{cases}$$

$$V_1=Span\left\{\bar{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

נגדיר את המרחב העצמי של $\lambda_2=2$

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=x_3\\ x_3\in R\end{cases}$$

$$V_2=Span\left\{\bar{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

נגדיר את המרחב העצמי של $\lambda_3=-1$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 7 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\\ 7x_2=-2x_3\\ x_3\in R\end{cases}$$

$$V_{-1}=Span\left\{\bar{b}_3=\begin{pmatrix}7\\ -2\\ 7\end{pmatrix}\right\}$$

לכן המטריצה A *לכסינה , המטריצה האלכסונית* D *והמטריצה המלכסנת* P *שלה הן*

$$P=\begin{pmatrix}\bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 7\end{pmatrix}\ ,\ D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

3. נחשב את הערכים העצמיים של המטריצה

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ -1 & 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)^2=0$$

למטריצה A יש 2 ערכים עצמיים $\lambda_1=1$ - שורש יחיד ו- $\lambda_2=3$ - שורש כפול . נגדיר תחילה את המרחב העצמי של $\lambda_2=3$

$$(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0}$$

$$\begin{pmatrix}1-3 & 2 & 2\\ 1 & 2-3 & -1\\ -1 & 1 & 4-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2+x_3\\ x_2\in R\\ x_3\in R\end{cases}\Rightarrow V_3=Span\left\{\bar{b}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\bar{b}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

בשלב זה ניתן לקבוע כי A לכסינה $(\dim V_3=p_3=2)$

נגדיר את המרחב העצמי של $\lambda_1=1$

$$\begin{pmatrix}1-1 & 2 & 2\\ 1 & 2-1 & -1\\ -1 & 1 & 4-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2x_3\\ x_2=-x_3\\ x_3\in R\end{cases}\Rightarrow V_1=Span\left\{\bar{b}_3=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

המטריצה A לכסינה , המטריצה האלכסונית D והמטריצה המלכסנת P שלה הן , למשל

$$P=\begin{pmatrix}\bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\ ,D=\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

4. נחשב את הערכים העצמיים של המטריצה

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ -1 & -1-\lambda & -1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)\lambda^2=0$$

למטריצה A יש 2 ערכים עצמיים $\lambda_1=1$ - שורש יחיד ו- $\lambda_2=0$ - שורש כפול .

נגדיר תחילה את המרחב העצמי של $\lambda_2=0$

$$(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0}$$

$$\begin{pmatrix}1-0 & 1 & 1\\ -1 & -1-0 & -1\\ 1 & 1 & 1-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=(0)\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2-x_3\\ x_2\in R\\ x_3\in R\end{cases}\Rightarrow V_0=Span\left\{\bar{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\bar{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

בשלב זה ניתן לקבוע כי A לכסינה ($\dim V_0=p_0=2$)

נגדיר את המרח ב העצמי של $\lambda_1=1$

$$\begin{pmatrix}1-1 & 1 & 1\\ -1 & -1-1 & -1\\ 1 & 1 & 1-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=-x_3\Rightarrow V_1=Span\left\{\bar{b}_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\right\}\\ x_3\in R\end{cases}$$

המטריצה A לכסינה , המטריצה האלכסונית D והמטריצה המלכסנת P שלה הן , למשל

$$P=\begin{pmatrix}\bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\ ,\ D=\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

5. נחשב את הערכים העצמיים של המטריצה

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda+5)=0$$

למטריצה A יש 2 ערכים עצמיים $\lambda_1=3$ - שורש כפול ו- $\lambda_2=-5$ - שורש יחיד . נגדיר תחילה את המרחב העצמי של $\lambda_1=3$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 1 \\ -1 & 4-3 & 2 \\ 0 & 0 & -5-3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x_1=x_2 \\ x_2\in R \\ x_3=0 \end{cases}\Rightarrow V_3=Span\left\{\bar{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

בשלב זה ניתן לקבוע כי A אינה לכסינה $(\dim V_3=1<p_3=2)$