# שיעור 11
## 1. מטריצת מעבר בסיס

**משפט 1**

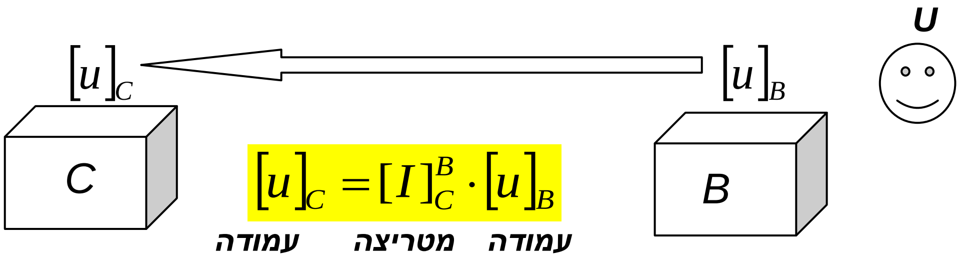
יהי $\mathbf{V}$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbf{F}$ , $\dim \mathbf{V}=n$

$B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_n\}$ ו- $C=\{\bar{c}_1,\bar{c}_2,...,\bar{c}_n\}$ - 2 בסיסים של $\mathbf{V}$

אזי

א) פונקציה $T:\mathbf{F}^n\mapsto\mathbf{F}^n$ המתאימה $T([u]_B)=[u]_C$ לכל $u\in\mathbf{V}$
היא אופרטור ליניארי חח"ע ועל

ב) קיימת המטריצה ריבועית הפיכה $(n\times n)$ המסומנת $[I]^B_C$
כך שלכל $u\in\mathbf{V}$ מתקיים $[u]_C=[I]^B_C\cdot[u]_B$ כאשר $[u]_B$ ו- $[u]_C$ הם וקטורי עמודה




**הגדרה 1**

בהמשך למשפט 1 – מטריצה $[I]^B_C$ נקראת **מטריצת המעבר** מבסיס $B$ לבסיס $C$

**משפט 2**

מטריצות המעבר ים ההפוכים הופכיות זו לזו $\left([I]^B_C\right)^{-1}=[I]^C_B$

**הוכחה**

לכל איבר $u\in\mathbf{V}$ מתקיים $[\bar{v}]_C=[I]^B_C\cdot[\bar{v}]_B$ ו- $[\bar{v}]_B=[I]^C_B\cdot[\bar{v}]_C$

לכן $[\bar{v}]_B=[I]^C_B\cdot[I]^B_C\cdot[\bar{v}]_B$ ולכן $[I]^C_B\cdot[I]^B_C=I$ מ.ש.ל.

**משפט 3**

יהי ו $E=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n\}$ - הבסיס הסטנדרטי

ו- $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_n\}$ - בסיס שרירותי של מרחב $\mathbf{F}^n$

אזי $[I]^B_E=\left(\bar{b}_1\bar{b}_2...\bar{b}_n\right)$ (עמודות המטריצה הן וקטורי הבסיס $B$)

**דוגמא 1**

יהיו $E=\left\{\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\bar{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $B=\left\{\bar{b}_1=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\bar{b}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ , $[u]_B=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ ב- $\mathbf{R}^2$

עפ"י הגדרה וקטור הקואורדינאטות $u=[u]_E=-3\bar{b}_1+4\bar{b}_2=-3\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

את אותו החישוב ניתן להציג על ידי כפל במטריצת המעבר

$$u=[u]_E=[I]^B_E[u]_B=\left(\bar{b}_1\bar{b}_2\right)[u]_B=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

הדגמנו כי $[I]^B_E=\left(\bar{b}_1\bar{b}_2\right)$

שמתם לב כי $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 4\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ ?

באופן כללי – להכפיל מטריצה בעמודה = לצור צירוף ליניארי של עמודות המטריצה

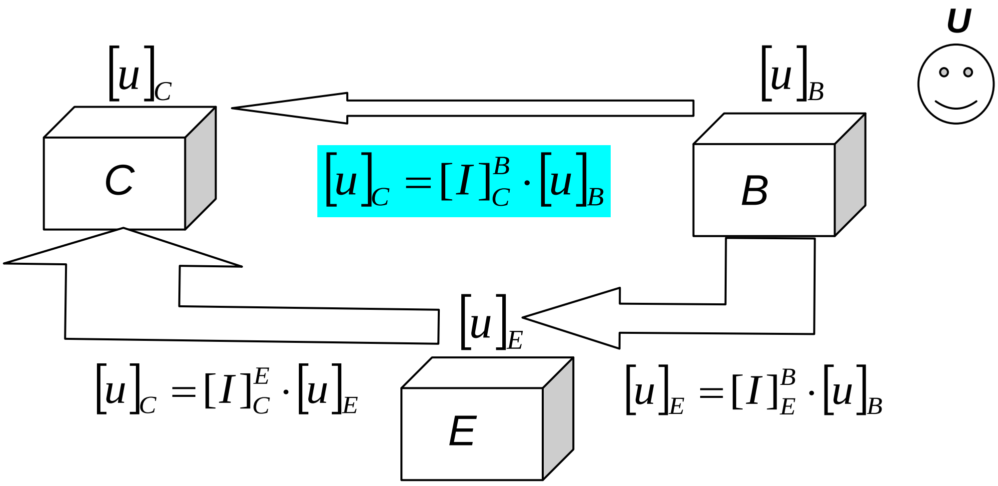
$$(c_1 c_2 \ldots c_n)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix} = x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_nc_n$$

**משפט 4**

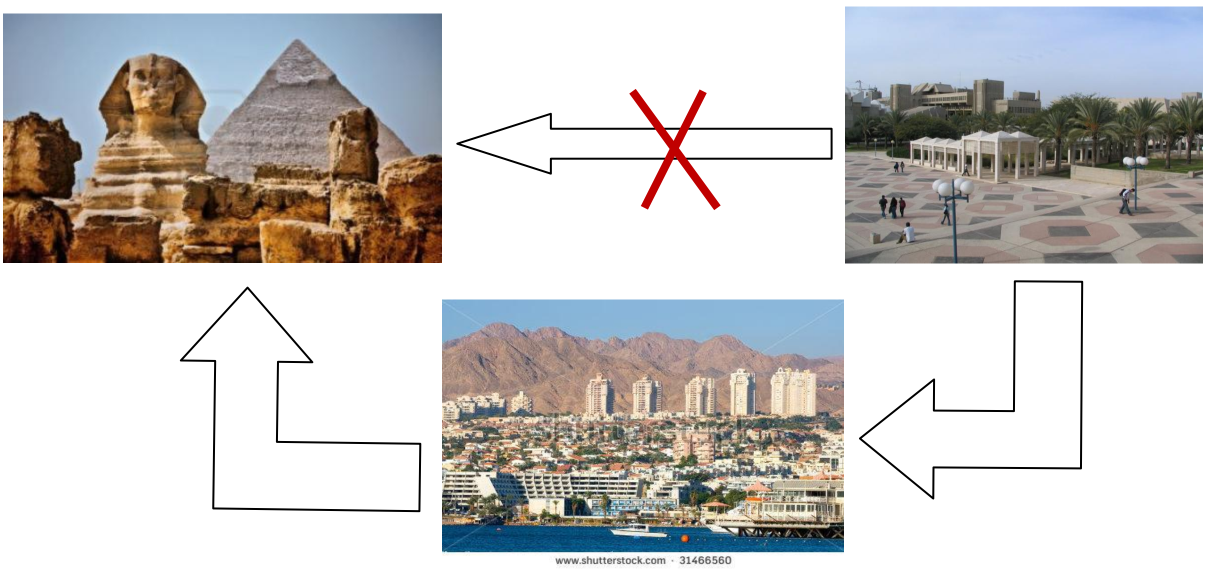
יהיו $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,\ldots,\bar{b}_n\}, C=\{\bar{c}_1,\bar{c}_2,\ldots,\bar{c}_n\}$ בסיסים שרירותיים של $\mathbf{F}^n$

ויהי $E=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n\}$ - הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{F}^n$

אזי $[I]_C^B = [I]_C^E \cdot [I]_E^B = \left([I]_E^C\right)^{-1} \cdot [I]_E^B = (\bar{c}_1\bar{c}_2\ldots\bar{c}_n)^{-1}\cdot\left(\bar{b}_1\bar{b}_2\ldots\bar{b}_n\right)$




$$[u]_C = [I]_C^E \cdot [I]_E^B \cdot [u]_B$$



**הוכחה**

לכל וקטור $\bar{v}\in\mathbf{F}^n$ מתקיים

$[\bar{v}]_E=[I]_E^B\cdot[\bar{v}]_B$ , כאשר $[I]_E^B=(\bar{b}_1\bar{b}_2...\bar{b}_n)$ לפי המשפט 3

$[\bar{v}]_C=[I]_C^E\cdot[\bar{v}]_E=\left([I]_E^C\right)^{-1}[\bar{v}]_E$ (לפי המשפט 2) לכן $[\bar{v}]_C=\left([I]_E^C\right)^{-1}\cdot[I]_E^B[\bar{v}]_B=$

ולכן $[I]_C^B=\left([I]_E^C\right)^{-1}\cdot[I]_E^B=(\bar{c}_1\bar{c}_2...\bar{c}_n)^{-1}\cdot(\bar{b}_1\bar{b}_2...\bar{b}_n)$ מ.ש.ל.

## כלל מעשי לחישוב מטריצת המעבר

### מבסיס $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_n\}$ לבסיס $C=\{\bar{c}_1,\bar{c}_2,...,\bar{c}_n\}$

$$\left(\bar{c}_1\bar{c}_2...\bar{c}_n\middle|\bar{b}_1\bar{b}_2...\bar{b}_n\right)\to...\to\left(I\middle|[I]_C^B\right)$$

**דוגמא 2**

נתונים 3 בסיסים של $R^2$

$$B=\{\bar{b}_1=(3,2),\bar{b}_2=(2,1)\},E=\{\bar{e}_1=(1,0),\bar{e}_2=(0,1)\},C=\{\bar{c}_1=(-2,3),\bar{c}_2=(1,-2)\}$$

ושלושה וקטורים $\bar{v},\bar{u},\bar{w}$ לגביהם ידוע כי

$[\bar{v}]_E=(2,-3),[\bar{u}]_B=(3,-1),[\bar{w}]_C=(-3,0)$.

א. מצא את מטריצות המעבר $[I]_E^B,\ [I]_E^C,\ [I]_C^B,\ [I]_B^C$ ,

ב. מצא את $\bar{u},\bar{w},[\bar{u}]_C,[\bar{w}]_B,[\bar{v}]_B$ תוך שימוש במטריצות המעבר המתאימות

**פתרון**

א. $[I]_E^C=(\bar{c}_1\bar{c}_2)=\begin{pmatrix}-2&1\\3&-2\end{pmatrix}$, $[I]_E^B=(\bar{b}_1\bar{b}_2)=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$ ,

$$[I]_C^B:(\bar{c}_1\bar{c}_2|\bar{b}_1\bar{b}_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}-2&1&3&2\\3&-2&2&1\end{array}\right)\to...\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-8&-5\\0&1&-13&-8\end{array}\right)\Rightarrow[I]_C^B=\begin{pmatrix}-8&-5\\-13&-8\end{pmatrix}$$

$$[I]_B^C:(\bar{b}_1\bar{b}_2|\bar{c}_1\bar{c}_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}3&2&-2&1\\2&1&3&-2\end{array}\right)\to...\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&8&-5\\0&1&-13&8\end{array}\right)\Rightarrow[I]_B^C=\begin{pmatrix}8&-5\\-13&8\end{pmatrix}$$

**הערה** - דרך נוספת למציאת $[I]_B^C$ הנה הפיכת המטריצה $[I]_C^B$

$$\left([I]_C^B\middle|I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}-8&-5&1&0\\-13&-8&0&1\end{array}\right)\to...\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&8&-5\\0&1&-13&8\end{array}\right)\Rightarrow[I]_B^C=\begin{pmatrix}8&-5\\-13&8\end{pmatrix}$$

ב. $\bar{u}=[I]_E^B\cdot[\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$, $\bar{w}=[I]_E^C\cdot[\bar{w}]_C=\begin{pmatrix}-2&3\\3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-36\end{pmatrix}$

$$[\bar{u}]_C=[I]_C^B\cdot[\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}-8&-5\\-13&-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18\\-31\end{pmatrix},\ [\bar{w}]_B=[I]_B^C\cdot[\bar{w}]_C=\begin{pmatrix}8&-5\\-13&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24\\39\end{pmatrix}$$

$$[\bar{v}]_B=[I]_B^E\cdot[\bar{v}]_E\Rightarrow(\bar{b}_1\bar{b}_2|\bar{v})=\left(\begin{array}{cc|c}3&2&-6\\2&1&-3\end{array}\right)\to...\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&-3\end{array}\right)\Rightarrow[\bar{v}]_B=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$$

**דוגמא 3**

נתונים 2 בסיסים של $R^3$

$$B=\{\bar b_1=(3,2,1),\bar b_2=(2,1,1),\bar b_3=(0,1,1)\},\ C=\{\bar c_1=(1,1,1),\bar c_2=(0,1,-2),\bar c_2=(0,-1,3)\}$$

ווקטורים $\bar u$ כך ש- $[\bar u]_B=(3,3,-1)$. מצא את מטריצות המעבר $[I]_C^B$ ואת $[\bar u]_C$

**פתרון**

$$(\bar c_1\bar c_2\bar c_3|\bar b_1\bar b_2\bar b_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&2&0\\1&1&-1&2&1&1\\1&-2&3&1&1&1\end{array}\right)\to\ldots\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&2&0\\0&1&0&-5&-4&4\\0&0&1&-4&-3`&3\end{array}\right)\Rightarrow[I]_C^B=\begin{pmatrix}3&2&0\\-5&-4&4\\-4&-3`&3\end{pmatrix}$$

$$.[\bar u]_C=[I]_C^B\cdot[\bar u]_B=\begin{pmatrix}3&2&0\\-5&-4&4\\-4&-3`&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-31\\-24\end{pmatrix}$$

**משפט 3***

יהי ו $E=\{\bar e_1,\bar e_2,\ldots,\bar e_n\}$ - הבסיס הסטנדרטי

ו- $B=\{\bar b_1,\bar b_2,\ldots,\bar b_n\}$ - בסיס שרירותי של מרחב $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$ ($\dim\mathbf{V}=n$)

אזי $[I]_E^B=([\bar b_1]_E[\bar b_2]_E\ldots[\bar b_n]_E)$

(עמודות המטריצ ה הן וקטורי הקואורדינאטות של וקטורי הבסיס $B$ בבסיס $E$)

.

**משפט 4***

יהיו $B=\{\bar b_1,\bar b_2,\ldots,\bar b_n\},C=\{\bar c_1,\bar c_2,\ldots,\bar c_n\}$ בסיסים שרירותיים

ויהי $E=\{\bar e_1,\bar e_2,\ldots,\bar e_n\}$ - הבסיס הסטנדרטי של מרחב $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$ ($\dim\mathbf{V}=n$)

אזי

$$[I]_C^B=[I]_C^E\cdot[I]_E^B=([I]_E^C)^{-1}\cdot[I]_E^B=([\bar c_1]_E[\bar c_2]_E\ldots[\bar c_n]_E)^{-1}\cdot([\bar b_1]_E[\bar b_2]_E\ldots[\bar b_n]_E)$$

## *כלל מעשי לחישוב מטריצת המעבר

מבסיס $B=\{\bar b_1,\bar b_2,\ldots,\bar b_n\}$ לבסיס $C=\{\bar c_1,\bar c_2,\ldots,\bar c_n\}$

$$([\bar c_1]_E[\bar c_2]_E\ldots[\bar c_n]_E|[\bar b_1]_E[\bar b_2]_E\ldots[\bar b_n])\to\ldots\to(I|[I]_C^B)$$

**דוגמא 4**

$C=\{1-t^2,1+t,t\}$ , $B=\{1+t+t^2,1-t+t^2,1+t+2t^2\}$ , $E=\{1,t,t^2\}$ , $\mathbf{V}=\mathbf{R}_3[t]$

אזי $[I]_E^B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ , $[I]_E^C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$ יהי $[f(x)]_B=(4,-3,2)$ אזי

$[f(x)]_E=[I]_E^B\cdot[f(x)]_B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\9\\5\end{pmatrix}$ ולכן $f(x)=3+9t+5t^2$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&1\\0&1&1&1&-1&1\\-1&0&0&1&1&2\end{array}\right)\to\ldots\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-1&-2\\0&1&0&2&2&3\\0&0&1&-1&-3&-2\end{array}\right)$ לכן $[I]_C^B=\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\2&2&3\\-1&-3&-2\end{pmatrix}$

$$[f(x)]_C=[I]_C^B\cdot[f(x)]_B=\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\2&2&3\\-1&-3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\8\\1\end{pmatrix}$$

בדיקה $[f(x)]_E=[I]_E^C\cdot[f(x)]_C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\8\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\9\\5\end{pmatrix}$ ולכן שוב $f(x)=3+9t+5t^2$

**דוגמא 5**

$\mathbf{V}=\mathbf{Q}^{2\times 2}$ , $E=\{\bar{e}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\bar{e}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\bar{e}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\bar{e}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\}$ ,

$$B=\{\bar{b}_{11}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\bar{b}_{12}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\bar{b}_{21}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\bar{b}_{22}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\}$$

$$C=\{\bar{c}_{11}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix},\bar{c}_{12}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\bar{c}_{21}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\bar{c}_{22}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\}$$

אזי $[I]_E^B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ , $[I]_E^C=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}$ יהי $[M]_B=(4,-3,2,-5)$ אזי

$[M]_E=[I]_E^B\cdot[M]_B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\4\end{pmatrix}$ ולכן $M=\begin{pmatrix}-2&3\\1&4\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&1&0&0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&1&0&0\\-1&1&0&1&1&0&0&0\end{array}\right)\to\dots\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&1&2&1\\0&1&0&0&1&1&1&1\\0&0&1&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right)$ לכן $[I]_C^B=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

$$[M]_C=[I]_C^B\cdot[M]_B=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\1&1&1&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

בדיקה $[M]_E=[I]_E^C\cdot[M]_C=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\4\end{pmatrix}$ ולכן שוב $M=\begin{pmatrix}-2&3\\1&4\end{pmatrix}$

**תרגילים**

(1-5) נתונים $B,C$ הבסיסים של $R^2$ , הבסיס הסטנדרטי $E$ ווקטורים $\bar{u},\bar{w}$ .

א. מצא את מטריצות המעבר $[I]_E^B,\ [I]_E^C,\ [I]_C^B,\ [I]_B^C$

ב. מצא את $\bar{u},\bar{w},[\bar{u}]_C,[\bar{w}]_B,$ תוך שימוש במטריצות המעבר המתאימות ,

1. $B=\{\bar{b}_1=(4,7),\bar{b}_2=(-1,-2)\},C=\{\bar{c}_1=(1,1),\bar{c}_2=(1,0)\}$
$[\bar{u}]_B=(0,-1),[\bar{w}]_C=(-3,3)$

2. $B=\{\bar{b}_1=(0,2),\bar{b}_2=(2,0)\},C=\{\bar{c}_1=(1,1),\bar{c}_2=(1,-1)\}$
$[\bar{u}]_B=(-1,-1),[\bar{w}]_C=(2,4)$

3. $B=\{\bar{b}_1=(3,5),\bar{b}_2=(2,3)\},C=\{\bar{c}_1=(-1,3),\bar{c}_2=(1,-2)\}$
$[\bar{u}]_B=(3,-1),[\bar{w}]_C=(-3,0)$

4. $B=\{\bar{b}_1=(-3,4),\bar{b}_2=(2,-3)\},C=\{\bar{c}_1=(-2,7),\bar{c}_2=(1,-3)\}$
$[\bar{u}]_B=(1,-1),[\bar{w}]_C=(-2,4)$

5. $B=\{\bar{b}_1=(1,0,0),\bar{b}_2=(2,1,0),\bar{b}_3=(3,2,1)\}$ , $C=\{\bar{c}_1=(1,-1,1),\bar{c}_2=(0,1,0),\bar{c}_3=(2,1,1)\}$
$[\bar{u}]_B=(0,-1,0)$

**תשובות**

**1**.א. $[I]_E^B=(\bar{b}_1\bar{b}_2)=\begin{pmatrix}4&-1\\7&-2\end{pmatrix},\ [I]_E^C=(\bar{c}_1\bar{c}_2)=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$

$$[I]_C^B:(\bar{c}_1\bar{c}_2|\bar{b}_1\bar{b}_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&4&-1\\1&0&7&-2\end{array}\right)\to\ldots\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&7&-2\\0&1&-3&1\end{array}\right)\Rightarrow[I]_C^B=\begin{pmatrix}7&-2\\-3&1\end{pmatrix}$$

$$[I]_B^C:(\bar{b}_1\bar{b}_2|\bar{c}_1\bar{c}_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}4&-1&1&1\\7&-2&1&0\end{array}\right)\to\ldots\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&2\\0&1&3&7\end{array}\right)\Rightarrow[I]_B^C=\begin{pmatrix}1&2\\3&7\end{pmatrix}$$

ב. $\bar{u}=[I]_E^B\cdot[\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}4&-1\\7&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \bar{w}=[I]_E^C\cdot[\bar{w}]_C=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

$$[\bar{u}]_C=[I]_C^B\cdot[\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}7&-2\\-3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\ [\bar{w}]_B=[I]_B^C\cdot[\bar{w}]_C=\begin{pmatrix}1&2\\3&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$$

**2**.א. $[I]_E^B=(\bar{b}_1\bar{b}_2)=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix},\ [I]_E^C=(\bar{c}_1\bar{c}_2)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

$$[I]_C^B:(\bar{c}_1\bar{c}_2|\bar{b}_1\bar{b}_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&2\\1&-1&2&0\end{array}\right)\to\ldots\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&1\\0&1&-1&1\end{array}\right)\Rightarrow[I]_C^B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$[I]_B^C:(\bar{b}_1\bar{b}_2|\bar{c}_1\bar{c}_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}0&2&1&1\\2&0&1&-1\end{array}\right)\to\ldots\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0.5&-0.5\\0&1&0.5&0.5\end{array}\right)\Rightarrow[I]_B^C=\begin{pmatrix}0.5&-0.5\\0.5&0.5\end{pmatrix}$$

ב. $\bar{u}=[I]_E^B\cdot[\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix},\ \bar{w}=[I]_E^C\cdot[\bar{w}]_C=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

$$,[\bar{u}]_C=[I]_C^B\cdot[\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix},\ [\bar{w}]_B=[I]_B^C\cdot[\bar{w}]_C=\begin{pmatrix}0.5&-0.5\\0.5&0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

**3.** א. $[I]_E^B=(\bar b_1\bar b_2)=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix},\ [I]_E^C=(\bar c_1\bar c_2)=\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}$

$$[I]_C^B:(\bar c_1\bar c_2|\bar b_1\bar b_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}-1&1&3&2\\3&-2&5&3\end{array}\right)\to\dots\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&11&7\\0&1&14&9\end{array}\right)\Rightarrow[I]_C^B=\begin{pmatrix}11&7\\14&9\end{pmatrix}$$

$$[I]_B^C:(\bar b_1\bar b_2|\bar c_1\bar c_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}3&2&-1&1\\5&3&3&-2\end{array}\right)\to\dots\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&9&-7\\0&1&-14&11\end{array}\right)\Rightarrow[I]_B^C=\begin{pmatrix}9&-7\\-14&11\end{pmatrix}$$

ב. $\bar u=[I]_E^B\cdot[\bar u]_B=\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\12\end{pmatrix},\ \bar w=[I]_E^C\cdot[\bar w]_C=\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$

$$[\bar u]_C=[I]_C^B\cdot[\bar u]_B=\begin{pmatrix}11&7\\14&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\33\end{pmatrix},\ [\bar w]_B=[I]_B^C\cdot[\bar w]_C=\begin{pmatrix}9&-7\\-14&11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27\\42\end{pmatrix}$$

**4.** א. $[I]_E^B=(\bar b_1\bar b_2)=\begin{pmatrix}-3&2\\4&-3\end{pmatrix},\ [I]_E^C=(\bar c_1\bar c_2)=\begin{pmatrix}-2&1\\7&-3\end{pmatrix}$

$$[I]_C^B:(\bar c_1\bar c_2|\bar b_1\bar b_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}-2&1&-3&2\\7&-3&4&-3\end{array}\right)\to\dots\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-5&3\\0&1&-13&8\end{array}\right)\Rightarrow[I]_C^B=\begin{pmatrix}-5&3\\-13&8\end{pmatrix}$$

$$[I]_B^C:(\bar b_1\bar b_2|\bar c_1\bar c_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}-3&2&-2&1\\4&-3&7&-3\end{array}\right)\to\dots\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-8&3\\0&1&-13&5\end{array}\right)\Rightarrow[I]_B^C=\begin{pmatrix}-8&3\\-13&5\end{pmatrix}$$

ב. $\bar u=[I]_E^B\cdot[\bar u]_B=\begin{pmatrix}-3&2\\4&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix},\ \bar w=[I]_E^C\cdot[\bar w]_C=\begin{pmatrix}-2&1\\7&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-26\end{pmatrix}$

$$[\bar u]_C=[I]_C^B\cdot[\bar u]_B=\begin{pmatrix}-5&3\\-13&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-21\end{pmatrix},\ [\bar w]_B=[I]_B^C\cdot[\bar w]_C=\begin{pmatrix}-8&3\\-13&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\46\end{pmatrix}$$

**5.** א. $(\bar c_1\bar c_2\bar c_3|\bar b_1\bar b_2\bar b_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&2&3\\-1&1&1&0&1&2\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\dots\Rightarrow[I]_C^B=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\-2&-3&-1\\1&2&2\end{pmatrix}$

ב. $\bar u=[I]_E^B\cdot[\bar u]_B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$[\bar u]_B=[I]_E^B\cdot[\bar u]_B=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\-2&-3&-1\\1&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$$

## 2. הצגת אופרטורים ליניאריים בבסיסים שונים

**הגדרה 2**

יהי $\mathbf{V}$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbf{F}$ , $\dim \mathbf{V} = n$ .

א.**אופרטור ליניארי** הוא כל העתקה ליניארית $T:\mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}$
(תחומה ולטווחה של $T$ שניהם שווים ל- $\mathbf{V}$)

ב.**מטריצה המייצגת** את האופרטור $T$ בבסיס $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_n\}$ של $\mathbf{V}$
המסומנת $[T]_B$ היא מטריצה ריבועית $n \times n$ המקיימת $[T\bar{u}]_B = [T]_B \cdot [\bar{u}]_B$
לכל וקטור $\bar{u} \in \mathbf{V}$ ( $[T\bar{u}]_B, [\bar{u}]_B$ הם עמודות )

**משפט 5**

כל הטענות כדלקמן שקולות (כל אחת גוררת את השאר ולהפך )

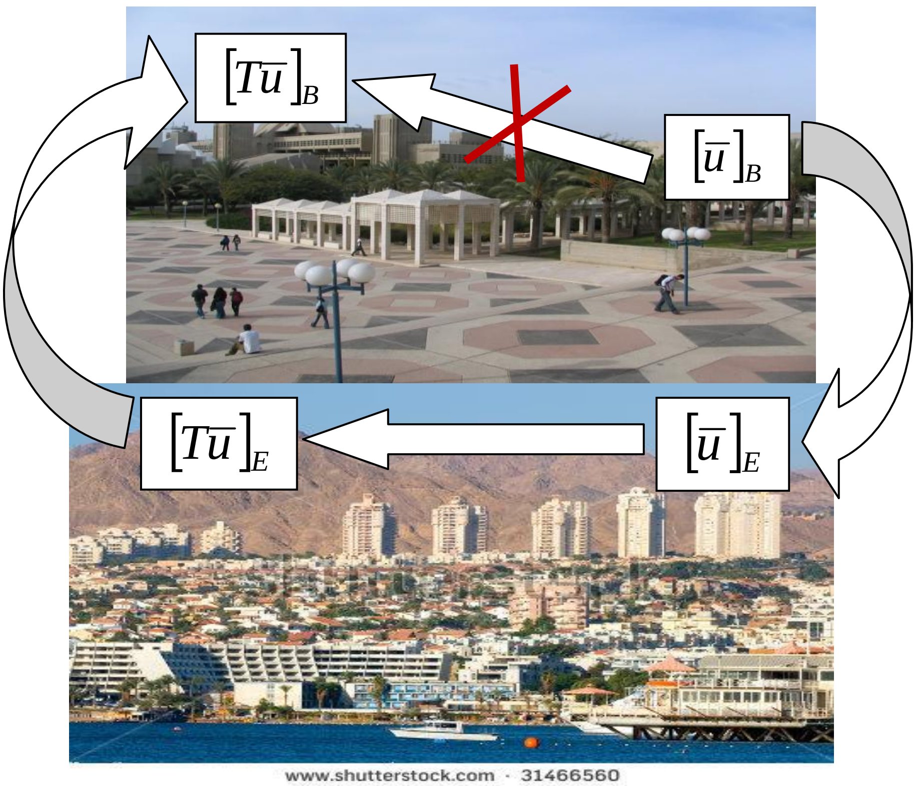
א. האופרטור $T:\mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}$ הוא **ליניארי**

ב. קיימת **מטריצה** $[T]_E = \left([T\bar{e}_1]_E [T\bar{e}_2]_E ... [T\bar{e}_n]_E\right)$
(עמודותיה של מטריצה הן וקטורי הקואורדינאטות של תמונות יהם של וקטורי בבסיס $E$ ) המייצג את האופרטור בבסיס הסטנדרטי $E$ של $\mathbf{V}$:
לכל $\bar{u} \in \mathbf{V}$ מתקיים $[T]_E \cdot [\bar{u}]_E = [T\bar{u}]_E$ ( $[\bar{u}]_E , [T\bar{u}]_E$ הם וקטורי עמודה )

ג. קיים בסיס $B$ של $\mathbf{V}$ וקיימת **מטריצה** $[T]_B = \left([Tb_1]_B [Tb_2]_B ... [Tb_n]_B\right)$
(עמודותיה של מטריצה המייצגת הן וקטורי הקואורדינאטות של תמונות יהם של וקטורי $B$ בבסיס $B$ המייצג את האופרטור בבסיס $B$:
לכל $\bar{u} \in \mathbf{V}$ מתקיים $[T]_B \cdot [\bar{u}]_B = [T\bar{u}]_B$ ( $[\bar{u}]_B , [T\bar{u}]_B$ הם וקטורי עמודה )

ד. לכל בסיס $B$ של $\mathbf{V}$ וקיימת **מטריצה** $[T]_B = \left([Tb_1]_B [Tb_2]_B ... [Tb_n]_B\right)$
(עמודותיה של מטריצה המייצגת הן וקטורי הקואורדינאטות של תמונות יהם של וקטורי $B$ בבסיס $B$ המייצג את האופרטור בבסיס $B$:
לכל $\bar{u} \in \mathbf{V}$ מתקיים $[T]_B \cdot [\bar{u}]_B = [T\bar{u}]_B$ ( $[\bar{u}]_B , [T\bar{u}]_B$ הם וקטורי עמודה ) ומתקיים

$$[T]_B == [I]_B^E \cdot [T]_E \cdot [I]_E^B = \left(\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_n\right)^{-1} \cdot \left([T\bar{e}_1]_E [T\bar{e}_2]_E ... [T\bar{e}_n]_E\right) \cdot \left(\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_n\right)$$



**דוגמא 6**

האופרטור $T:\mathbf{R}_3[t]\mapsto \mathbf{R}_3[t]$ המוגדר על ידי $T(f(t))=f(t)-f'(t)$ לכל $f(t)\in\mathbf{R}_3[t]$

$$E=\{\bar{e}_1=1,\bar{e}_2=t,\bar{e}_3=t^2\}$$

$$T(1)=1\Rightarrow [T(1)]_E=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},T(t)=-1+t\Rightarrow [T(t)]_E=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},T(t^2)=-2t+t^2\Rightarrow [T(t^2)]_E=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$[T]_E=\left([T(1)]_E[T(t)]_E[T(t^2)]_E\right)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ניקח לדוגמא $f(t)=10-3t+4t^2$ , $[f(t)]_{E1}=(10,-3,4)$

$$T(f(t))=f'(t)=10-3t+4t^2+3-8t=13-11t+4t^2$$

$$[T(f(t))]_E=[T]_E\cdot[f(t)]_E=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-11\\4\end{pmatrix}$$

**דוגמא 7**

$T:R^2\mapsto R^2$ מתאימה לכל וקטור $(x_1,x_2)\in R^2$ את התמונה $(3x_1-2x_2,-x_1-5x_2)\in R^2$ ,

$B=\{\bar{b}_1=(4,7),\bar{b}_2=(-1,-2)\}$ , $[\bar{u}]_B=(1,3)$ ,

$[T]_E=A=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&-5\end{pmatrix}$ , $(\bar{b}_1,\bar{b}_2)=\begin{pmatrix}4&-1\\7&-2\end{pmatrix}$, $(\bar{b}_1,\bar{b}_2)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\7&-4\end{pmatrix}$ ,

$[T]_B=(\bar{b}_1,\bar{b}_2)^{-1}\cdot A\cdot(\bar{b}_1,\bar{b}_2)=\begin{pmatrix}2&-1\\7&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1\\7&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35&-9\\142&-37\end{pmatrix}$ ,

א. נמצא את $T\bar{u}$ על ידי הפעלת האופרטור בבסיס הסטנדרטי

$\bar{u}=[I]_E^B[\bar{u}]_B=(\bar{b}_1,\bar{b}_2)[\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}4&-1\\7&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ , $T\bar{u}=\begin{pmatrix}3-2\\-1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$ ,

ב. נמצא את $T\bar{u}$ על ידי הפעלת האופרטור בבסיס $B$

$[T\bar{u}]_B=[T]_B[\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}35&-9\\142&-37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\31\end{pmatrix}$ ,

$T\bar{u}=[I]_E^B[T\bar{u}]_B=(\bar{b}_1,\bar{b}_2)\cdot[T\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}4&-1\\7&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\31\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$ .

**תרגילים** (6-10)

לכל אחת מן האופרטורים הליניאריים $T:\mathbf{R}^n\mapsto\mathbf{R}^n$ הבאים מצא את המטריצה $[T]_B$ המייצגת אותו בבסיס של $R^n$ וחשב את תמונתו $T\bar{u}$ של וקטור $\bar{u}$ (כאשר נתון $[\bar{u}]_B$)

ב - 2 הדרכים הבאות :

א. מציאת $\bar{u}$ תוך שימוש במטריצת מעבר בסיס המתאימה והצבתו בתבנית של $T$

ב. מציאת $[T\bar{u}]_B$ תוך שימוש במטריצה $[T]_B$ ולאחר מכן מציאת $T\bar{u}$ תוך שימוש במטריצת מעבר הבסיס המתאימה

**6.** $T:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}^2$ מתאימה לכל וקטור $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$ את התמונה $(7x_1+2x_2,-4x_1+x_2)\in\mathbf{R}^2$

$[\bar{u}]_B=(7,-6)$ , $B=\{\bar{b}_1=(1,-1),\bar{b}_2=(1,-2)\}$

**7.** $T:\mathbf{R}^3\mapsto\mathbf{R}^3$ מתאימה לכל וקטור $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$ את התמונה

$(x_1+3x_2+3x_3,-3x_1-5x_2-3x_3,3x_1+3x_2+x_3)\in R^3$

$[\bar{u}]_B=(3,-1,1)$ , $B=\{\bar{b}_1=(1,-1,1),\bar{b}_2=(-1,1,0),\bar{b}_3=(-1,0,1)\}$

**8.** $T:\mathbf{R}^3\mapsto\mathbf{R}^3$ מתאימה לכל וקטור $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$ את התמונה

$B=\{\bar{b}_1=(1,1,1),\bar{b}_2=(1,1,0),\bar{b}_3=(0,1,1)\}$ , $(x_1-x_2+x_3,x_1-x_2+x_3,x_1-x_2+x_3)\in\mathbf{R}^3$

, $[\bar{u}]_B=(3,5,7)$

**9.** $T:\mathbf{R}^{2\times2}\mapsto\mathbf{R}^{2\times2}$ מתאימה לכל וקטור $\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times2}$ את התמונה

$B=\{\bar{b}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\bar{b}_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\bar{b}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\bar{b}_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\}$ , $\begin{pmatrix}x_1-x_2+x_3 & x_1+x_2-x_3\\ x_2-x_3+x_4 & -x_3+2x_4\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times2}$

$[\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$ , $C=\{\bar{c}_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\bar{c}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\bar{c}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\bar{c}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\}$

**10.** $T:\mathbf{R}_3[t]\mapsto\mathbf{R}_3[t]$ המוגדרת על ידי $T(f(t))=f(t)-f'(t)$ לכל $f(t)\in\mathbf{R}_3[t]$

$[f(t)]_B=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\end{pmatrix}$ , $C=\{1-t^2,1+t,t\}$ , $B=\{1+t+t^2,1-t+t^2,1+t+2t^2\}$

**פתרונות**

**.6** $[T]_E = A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ , $(\bar{b}_1, \bar{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $(\bar{b}_1, \bar{b}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$[T]_B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)^{-1} \cdot A \cdot (\bar{b}_1, \bar{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**א.** $\bar{u} = [I]_E^B [\bar{u}]_B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)[\bar{u}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ , $T\bar{u} = \begin{pmatrix} 7+10 \\ -4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \end{pmatrix}$

**ב.** $[T\bar{u}]_B = [T]_B [\bar{u}]_B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -18 \end{pmatrix}$

$$T\bar{u} = [I]_E^B [T\bar{u}]_B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2) \cdot [T\bar{u}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 35 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**.7** $[T]_E = A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$[T]_B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)^{-1} \cdot A \cdot (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**א.** $\bar{u} = [I]_E^B [\bar{u}]_B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)[\bar{u}]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$T\bar{u} = A \cdot \bar{u} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**ב.** $[T\bar{u}]_B = [T]_B [\bar{u}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$T\bar{u} = [I]_E^B [T\bar{u}]_B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) \cdot [T\bar{u}]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**8.**

$$\left(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix},\ \left(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\right)=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\ ,[T]_E=A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$[T]_B=\left(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\right)^{-1}\cdot A\cdot\left(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\right)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

א.

$$T\bar{u}=A\cdot\bar{u}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\15\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\ ,\bar{u}=[I]_E^B[\bar{u}]_B=\left(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\right)[\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\15\\10\end{pmatrix}$$

ב.

$$[T\bar{u}]_B=[T]_B[\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T\bar{u}=[I]_E^B[T\bar{u}]_B=\left(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\right)\cdot[T\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

**9.**

$$[I]_E^C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\ ,[I]_E^B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\ ,[T]_E^E=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\1&1&-1&0\\0&1&-1&1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$[T]_C^B=\left([I]_E^C\right)^{-1}\cdot[T]_E^E\cdot[I]_E^B=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&2&0\\1&-1&0&0\\0&1&2&0\end{pmatrix}$$

א.

$$[\bar{u}]_E=[I]_E^B[\bar{u}]_B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$[T\bar{u}]_E=[T]_E^E[\bar{u}]_E=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\1&1&-1&0\\0&1&-1&1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow T\bar{u}=\begin{pmatrix}0&0\\-1&-3\end{pmatrix}$$

ב.

$$[T\bar{u}]_C=[T]_C^B[\bar{u}]_B==\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&2&0\\1&-1&0&0\\0&1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$T\bar{u}=[I]_E^C[T\bar{u}]_C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow T\bar{u}=\begin{pmatrix}0&0\\-1&-3\end{pmatrix}$$

$C=\{1-t^2,1+t,t\}\ ,\ B=\{1+t+t^2,1-t+t^2,1+t+2t^2\}\ ,E=\{1,t,t^2\}\ ,\ \mathbf{V}=\mathbf{R}_3[t]$ **.10**

$$[I]_E^C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\ ,[I]_E^B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix},[T]_E=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

א. $$[f(t)]_E=[I]_E^B\cdot[f(t)]_B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\9\\5\end{pmatrix}\Rightarrow f(t)=3+9t+5t^2$$

$$T(f(t))=f(t)-f'(t)=3+9t+5t^2-\left(3+9t+5t^2\right)'=-6-t+5t^2$$

ב. $$[T]_C^B=\left([I]_E^C\right)^{-1}[T]_C^B[I]_E^B=\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\1&3&2\\-2&-6&-5\end{pmatrix}$$

$$[T(f(t))]_C=[T]_C^B\cdot[f(t)]_B=\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\1&3&2\\-2&-6&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$[T(f(t))]_E=[I]_E^C\cdot[T(f(t))]_C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-1\\5\end{pmatrix}\Rightarrow f(t)=-6-t+5t^2$$

# 3. הצגת העתקות ליניאריות בבסיסים שונים

**הגדרה 3**

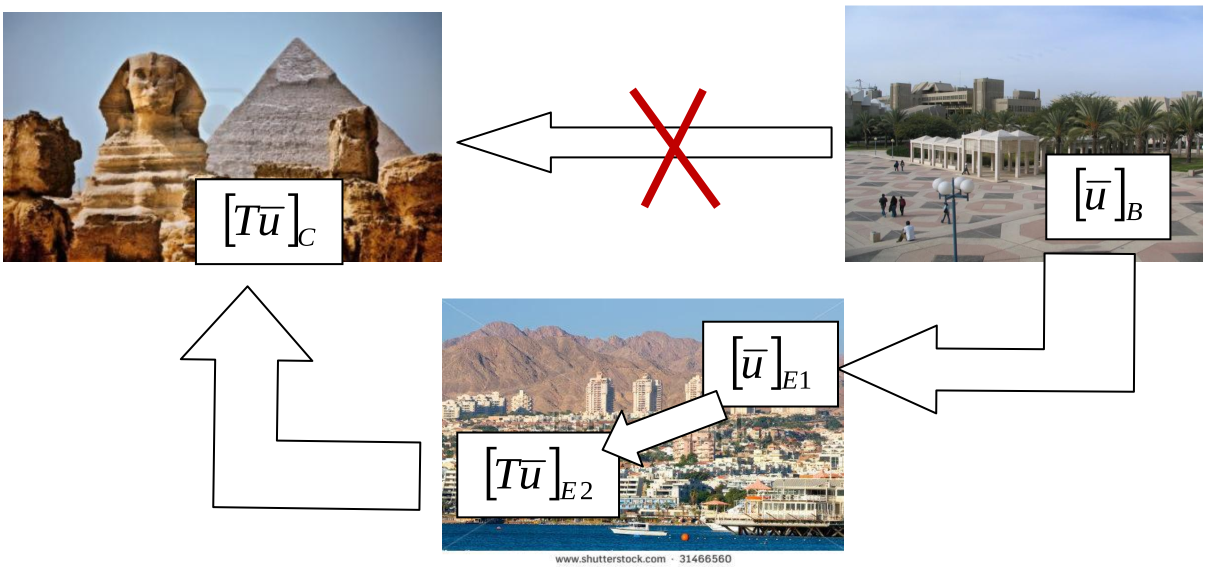
יהיו $\mathbf{V},\mathbf{W}$ מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbf{F}$, $\dim \mathbf{V}=n$ , $\dim \mathbf{W}=m$
ותהי $T:\mathbf{V}\mapsto \mathbf{W}$ העתקה ליניארית. **המטריצה המייצגת** את ההעתקה $T$
מבסיס $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_n\}$ של $\mathbf{V}$ לבסיס $C=\{\bar{c}_1,\bar{c}_2,...,\bar{c}_m\}$ של $\mathbf{W}$ (המסומנת $[T]_C^B$)
היא מטריצה $m\times n$ המקיימת $[T\bar{u}]_C=[T]_C^B\cdot[\bar{u}]_B$ לכל וקטור $\bar{u}\in\mathbf{V}$
( $[T\bar{u}]_B, [\bar{u}]_B$ הם עמודות )

**משפט 6**

ההעתקה $T:\mathbf{V}\mapsto \mathbf{W}$ הוא **ליניארית** אם ורק אם לכל זוג בסיסים $B$ של $\mathbf{V}$ ו- $C$ של $\mathbf{W}$
קיימת **מטריצה** $[T]_C^B=\left([T\bar{b}_1]_C[T\bar{b}_2]_C...[T\bar{b}_n]_C\right)$ (עמודותיה של המטריצה הן וקטורי
הקואורדינטות של תמונות של איברי $B$ בבסיס $C$)
כך שלכל $\bar{u}\in\mathbf{V}$ מתקיים $[T]_C^B\cdot[\bar{u}]_B=[T\bar{u}]_C$ ( $[\bar{u}]_B,[T\bar{u}]_C$ הם וקטורי עמודה ) ומתקיים

$$[T]_C^B == [I]_C^E\cdot[T]_{E2}^{E1}\cdot[I]_E^B =$$
$$\left([c_1]_{E2}[c_2]_{E2},...[c_m]_{E2}\right)^{-1}\cdot\left([T\bar{e}_1]_{E2}[T\bar{e}_2]_{E2}...[T\bar{e}_n]_{E2}\right)\cdot\left([b_1]_{E1}[b_2]_{E1}...[b_n]_{E1}\right)$$

( $E1,E2$ הם בסיסים סטנדרטיים של $\mathbf{V},\mathbf{W}$ בהתאמה )



## דוגמא 8

העתקה $T:\mathbf{R}_3[t]\mapsto \mathbf{R}_2[t]$ המוגדרת על ידי $T(f(t))=f'(t)$ לכל $f(t)\in \mathbf{R}_3[t]$

$$E2=\{\bar{e}_1=1,\bar{e}_2=t\}\ ,\ E1=\{\bar{e}_1=1,\bar{e}_2=t,\bar{e}_3=t^2\}$$

$$[f(t)]_B=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\end{pmatrix}\ ,C=\{1-t,-1+2t\}\ ,\ B=\{1+t+t^2,1-t+t^2,1+t+2t^2\}$$

$$[I]_E^C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\ ,[I]_E^B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},[T]_E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$[f(t)]_E=[I]_E^B\cdot[f(t)]_B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 9\\ 5\end{pmatrix}\Rightarrow f(t)=3+9t+5t^2$$

$$T(f(t))=f'(t)=9+10t$$

$$[T]_C^B=\left([I]_E^C\right)^{-1}[T]_C^B[I]_E^B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 6\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$[T(f(t))]_C=[T]_C^B\cdot[f(t)]_B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 6\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\ 19\end{pmatrix}$$

$$[T(f(t))]_E=[I]_E^C\cdot[T(f(t))]_C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}28\\ 19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 10\end{pmatrix}\Rightarrow f(t)=9+10t$$