שיעור 10 העתקות (טרנספורמציות) ליניאריות

בכל ההגדרות ומשפטים הבאים $\mathbf{V},\mathbf{W}$ הם מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbf{F}$

הגדרה 1

העתקה (טרנספורמציה)

$$T:\mathbf{V}\mapsto\mathbf{W}$$

היא פונקציה המתאימה לכל איבר $v\in\mathbf{V}$ (מקור) איבר אחד ויחיד $w\in\mathbf{W}$ (תמונה)

$$T(v)=Tv=w$$

הגדרה 2

העתקה (טרנספורמציה) $T:\mathbf{V}\mapsto\mathbf{W}$ היא **ליניארית** אם

1. לכל $v\in\mathbf{V}$ ולכל $k\in\mathbf{F}$ מתקיים $T(kv)=kT(v)$
2. לכל $u,v\in\mathbf{V}$ מתקיים $T(u+v)=T(u)+T(v)$

מסקנה - $T(\bar{0})=\bar{0}$

דוגמאות

1. העתקה $T:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}^2$ המוגדרת על ידי $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_2\end{pmatrix}$ לכל $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$

היא ליניארית

2. העתקה $T:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}^2$ המוגדרת על ידי $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\cdot x_2\\x_1-x_2\end{pmatrix}$ לכל $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$

אינה ליניארית

3. העתקה $T:\mathbf{R}^{2\times 2}\mapsto\mathbf{R}^{2\times 2}$ המוגדרת על ידי $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ לכל $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times 2}$

היא **ליניארית**

4. העתקה $T:\mathbf{R}[x]\mapsto\mathbf{R}[x]$ המוגדרת על ידי $T\big(f(x)\big)=f'(x)$ לכל $f(x)\in\mathbf{R}[x]$

היא **ליניארית** ($\mathbf{R}[x]$ - מרחב הפונקציות הגזירות אינסוף פעמים בכל $x\in\mathbf{R}$)

משפט 1

א. העתקה $T:\mathbf{F}^n\mapsto\mathbf{F}^m$ הוא **ליניארית**

אם ורק אם קיימת **מטריצה** אחת ויחידה $A_{m\times n}$

כך שלכל $\bar{u}\in\mathbf{F}^n$ מתקיים $A\cdot\bar{u}=T\bar{u}$ ($\bar{u}$ ו- $T(\bar{u})$ הם וקטורי עמודה)

ב. $A_{m\times n}=\left(T\bar{e}_1T\bar{e}_2...T\bar{e}_n\right)$

(עמודותיה של A הן תמונות יהם של וקטורי הבסיס הסטנדרט של מרחב $\mathbf{F}^n$)

הוכחה

לכל וקטור $\bar{u}=(u_1,u_2,...,u_n)\in\mathbf{F}^n$ ניתן לכתוב

$$\bar{u}=u_1\bar{e}_1+u_2\bar{e}_2+...+u_n\bar{e}_n$$

מכאן

$$T(\bar{u})=T(u_1\bar{e}_1+u_2\bar{e}_2+...+u_n\bar{e}_n)=u_1T\bar{e}_1+u_2T\bar{e}_2+...+u_nT\bar{e}_n$$

את אותו הביטוי ניתן לקבל על ידי מכפלת המטריצות

$$A\cdot\bar{u}=\left(T\bar{e}_1,T\bar{e}_2,...,T\bar{e}_n\right)\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\...\\u_n\end{pmatrix}=u_1T\bar{e}_1+u_2T\bar{e}_2+...+u_nT\bar{e}_n$$ מ.ש.ל.

נחזור ל**דוגמא 1**

העתקה $T:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}^2$ המוגדרת על ידי $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_2\end{pmatrix}$ לכל $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$

$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ לכן $A=\left(T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

ואכן $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_2\end{pmatrix}$ לכל $(x_1,x_2)\in R^2$

לכן ההעתקה ליניארית

נחזור ל**דוגמא 2**

העתקה $T:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}^2$ המוגדרת על ידי $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\cdot x_2\\x_1-x_2\end{pmatrix}$ לכל $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$

$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ לכן $A=\left(T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$

אבל $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\-x_2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}x_1\cdot x_2\\x_1-x_2\end{pmatrix}$

לכן נבנה דוגמא נגדית על מנת להוכיח כי ההעתקה אינה ליניארית

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\ T\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]=T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

א. העתקה $T:\mathbf{F}^n\mapsto\mathbf{F}^m$ הוא **ליניארית**

אם ורק אם קיימת **מטריצה** אחת ויחידה $A_{m\times n}$

כך שלכל $\bar{u}\in\mathbf{F}^n$ מתקיים $A\cdot\bar{u}=T\bar{u}$ ($\bar{u}$ ו- $T(\bar{u})$ הם וקטורי עמודה)

ב. $A_{m\times n}=\left(T\bar{e}_1T\bar{e}_2...T\bar{e}_n\right)$

(עמודותיה של A הן תמונותיהם של וקטורי הבסיס הסטנדרט של מרחב $\mathbf{F}^n$)

משפט 1*

א. העתקה $T:\mathbf{V}\mapsto\mathbf{W}$ הוא **ליניארית**

אם ורק אם קיימת **מטריצה** אחת ויחידה $A_{m\times n}=\left[T\right]_{E2}^{E1}$

כך שלכל $v\in\mathbf{V}$ מתקיים $A\cdot\left[v\right]_{E1}=\left[Tv\right]_{E2}$

($E1,E2$ הם בסיסים סטנדרטיים של $\mathbf{V},\mathbf{W}$ בהתאמה ו- $\left[\bar{u}\right]_{E1},\left[T\bar{u}\right]_{E2}$ הם וקטורי עמודה)

ב. $A_{m\times n}=\left(\left[T\bar{e}_1\right]_{E2}\left[T\bar{e}_2\right]_{E2}...\left[T\bar{e}_n\right]_{E2}\right)$

(עמודותיה של המטריצה הן וקטורי הקואורדינאטות של תמונותיהם של וקטורי $E1$ בבסיס $E2$)

נחזור לדוגמא 3

העתקה $T:\mathbf{R}^{2\times2}\mapsto\mathbf{R}^{2\times2}$ המוגדרת על ידי $T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ לכל $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times2}$

הבסיס הסטנדרטי $E1=E2=\{\bar{e}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\bar{e}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\bar{e}_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\bar{e}_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}$

לכן

$$T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A=\left([T\bar{e}_{11}]_{E2}[T\bar{e}_{12}]_{E2}[T\bar{e}_{21}]_{E2}[T\bar{e}_{22}]_{E2}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ואכן $A\cdot\left[\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\right]_{E1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\\ -b\\ -c\\ a\end{pmatrix}=\left[T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right]_{E2}$ לכל $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times2}$

לכן ההעתקה ליניארית

דוגמא 5

העתקה $T:\mathbf{R}_3[t]\mapsto\mathbf{R}_2[t]$ המוגדרת על ידי $T(f(t))=f'(t)$ לכל $f(t)\in\mathbf{R}_3[t]$

$$E2=\{\bar{e}_1=t,\bar{e}_2=1\}\ ,\ E1=\{\bar{e}_1=t^2,\bar{e}_2=t,\bar{e}_3=1\}$$

$$T(t^2)=2t\Rightarrow[T(t^2)]_{E2}=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix},T(t)=1\Rightarrow[T(t)]_{E2}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},T(1)=0\Rightarrow[T(1)]_{E2}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$A=\left([T(t^2)]_{E2}[T(t)]_{E2}[T(1)]_{E2}\right)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

ניקח לדוגמא $f(t)=4t^2-3t+10$, $[f(t)]_{E1}=(4,-3,10)$

$$T(f(t))=f'(t)=8t-3$$

$$[T(f(t))]_{E2}=A\cdot[f(t)]_{E1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ -3\end{pmatrix}$$

הגדרה 3

העתקה ליניארית $T:\mathbf{V}\mapsto\mathbf{W}$ נקראת ***חד-חד-ערכית*** אם ורק אם

לכל 2 וקטורים $\bar{u},\bar{v}\in\mathbf{V}$ מתקיים $\bar{u}\neq\bar{v}\Rightarrow T(\bar{u})\neq T(\bar{v})$ או $T(\bar{u})=T(\bar{v})\Rightarrow\bar{u}=\bar{v}$

הגדרה 4

העתקה ליניארית $T:\mathbf{V}\mapsto\mathbf{W}$ נקראת העתקת ***על*** (העתקה ***על*** $\mathbf{W}$)

אם ורק אם לכל $\bar{w}\in\mathbf{W}$ קיים $\bar{u}\in\mathbf{V}$ כך ש- $T(\bar{u})=\bar{w}$

הגדרה 5

תהי $T:\mathbf{V}\mapsto\mathbf{W}$ - העתקה ליניארית

הקבוצה של כל התמונות של כל הוקטורים ב- $\mathbf{V}$ נקראת ***התמונה של*** T

$$\operatorname{Im}T=\{T(\bar{u})|\bar{u}\in\mathbf{V}\}$$

הקבוצה של כל הוקטורים ב- $\mathbf{V}$ המותאמים על ידי T לווקטור האפס

נקראת ***הגרעין*** ***של*** T

$$KerT=\{\bar{u}\in\mathbf{V}|T(\bar{u})=\bar{0}\}$$

משפט 2

לכל העתקה ליניארית $T:\mathbf{V}\mapsto\mathbf{W}$

א. $\operatorname{Im}T$ מהווה תת-מרחב של $\mathbf{W}$

ב. $KerT$ מהווה תת-מרחב של $\mathbf{V}$

תרגיל 1 – הוכח את המשפט 2

משפט 3

תהי $A_{m\times n}$ המטריצה המייצגת את הטרנספורמציה הליניארית $T:\mathbf{F}^n\mapsto\mathbf{F}^m$

(לכל $\bar{u}\in\mathbf{F}^n$ מתקיים $A\cdot\bar{u}=T\bar{u}$, $\bar{u}$ ו- $T(\bar{u})$ הם וקטורי עמודה). אזי

א. $\operatorname{Im}T=ColA$ ב. $KerT=NulA$

תרגיל 2 – הוכח את המשפט 3

משפט 3*

תהי $A_{m\times n}=[T]_{E2}^{E1}$ המטריצה המייצגת את הטרנספורמציה הליניארית $T:\mathbf{V}\mapsto\mathbf{W}$

(לכל $v\in\mathbf{V}$ מתקיים $A\cdot[v]_{E1}=[Tv]_{E2}$, $E1,E2$ הם בסיסים סטנדרטיים של $\mathbf{V},\mathbf{W}$ בהתאמה

ו- $[\bar{u}]_{E1},[T\bar{u}]_{E2}$ הם וקטורי עמודה). אזי

א. $[\operatorname{Im}T]_{E2}=ColA$ ב. $[KerT]_{E1}=NulA$

משפט 4

תהי $T:\mathbf{V}\mapsto\mathbf{W}$ - טרנספורמציה ליניארית המיוצגת על ידי המטריצה $A_{m\times n}=[T]_{E2}^{E1}$

($E1,E2$ הם בסיסים סטנדרטיים של $\mathbf{V},\mathbf{W}$ בהתאמה , $\dim\mathbf{V}=n,\ \dim\mathbf{W}=m$). אזי

א. T היא **חד-חד-ערכית** אם ורק אם $KerT=NulA=\{\bar{0}\}$ (עמודותיה של $A_{m\times n}$ בת"ל)

ב. T היא טרנספורמציית **על** $\mathbf{W}$ אם ורק אם $\operatorname{Im}T=\mathbf{W}$ ($rankA=m$)

משפט 5

תהי $T:\mathbf{V}\mapsto\mathbf{W}$ - טרנספורמציה ליניארית , $\dim\mathbf{V}=n,\ \dim\mathbf{W}=m$. אזי

א. אם $m>n$ אז T אינה **חד-חד-ערכית** ו- $KerT\neq\{\bar{0}\}$

ב. אם $m<n$ אז T אינה טרנספורמציית **על** $\mathbf{W}$ ו- $\operatorname{Im}T\neq\mathbf{W}$

ג. אם $m=n$ אז T **חד-חד-ערכית** אם ורק אם T היא **על** $\mathbf{W}$

הגדרה 5

טרנספורמציה ליניארית $T:\mathbf{V}\mapsto\mathbf{V}$ ($\mathbf{V}=\mathbf{W}$) נקראת **אופרטור ליניארי**

משפט 6

יהי $T:\mathbf{V}\mapsto\mathbf{V}$ **אופרטור ליניארי** , המיוצג על ידי המטריצה $A_{n\times n}=[T]_E^E$

(E הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{V}$). אזי **כל הטענות הבאות שקולות**

(כל אחת גוררת את כל השאר ולהפך – אי קיום של כל אחת גורר אי קיום של כל השאר):

א. T הוא **חד-חד-ערכי** $\mathbf{V}$

ב. T **על** $\mathbf{V}$

ג. T הוא **הפיך** (קיים אופרטור הופכי T^{-1} כך ש- $T^{-1}(T(\bar{u}))=\bar{u}$ לכל $\bar{u}\in\mathbf{V}$

ד. A היא **הפיכה** ו- $A^{-1}=[T^{-1}]_E^E$

משפט 7

לכל טרנספורמציה ליניארית $T:\mathbf{V}\mapsto\mathbf{W}$ מתקיים השוויון

$$\dim KerT+\dim\operatorname{Im}T=\dim\mathbf{V}$$

(בפרט עבור $T:\mathbf{F}^n\mapsto\mathbf{F}^m$ מתקיים $\dim KerT+\dim\operatorname{Im}T=n$)

תרגילים

3. העתקה $T:\mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^3$ מתאימה לכל וקטור $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ את תמונתו $\begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ 4x_2 \\ -x_1 - 5x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$

א) הוכח כי העתקה ליניארית
ב) מצא הצגה סטנדרטית של ההעתקה באמצעות מטריצה A
ג) מצא בסיס ומימד לתמונה $\mathrm{Im}T$ וגרעין $KerT$ של T
ד) האם T היא על ו/או חח"ע – נמק את תשובתך

<u>פתרון</u>

א,ב) נשים לב כי לכל וקטור $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ מתקיים $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ 4x_2 \\ -x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}$

לכן $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ ולכן העתקה ליניארית

ג,ד) נדרג את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

מכאן $\mathrm{Im}T = ColA = Sp\{(3,0,-1),(-2,4,-5)\}$ והבסיס לתמונה הנו $\{(3,0,-1),(-2,4,-5)\}$
$\dim \mathrm{Im}T = 2$, $\mathrm{Im}T \neq R^3$ $\left(\mathrm{Im}T \subset R^3\right)$ לכן הטרנספורמציה אינה על
$KerT = NulA = \{\bar{0}\}$ לכן הטרנספורמציה היא חד-חד-ערכית
לגרעין (מרחב האפס) אין בסיס ו- $\dim KerT = 0$

4. א) הגדר העתקה ליניארית $T:\mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^2$ כך ש-

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ב) מצא הצגה סטנדרטית של ההעתקה באמצעות מטריצה A
ג) מצא בסיס ומימד לתמונה $\mathrm{Im}T$ וגרעין $KerT$ של T
ד) האם T היא על ו/או חח"ע – נמק את תשובתך

<u>פתרון</u> א,ב) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

לכן $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\3&-8&0\end{pmatrix}$ ו- $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\3&-8&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ לכל $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3$

ג,ד) נדרג את המטריצה $A\mapsto\ldots\mapsto\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&1.5\end{pmatrix}$

מכאן $\operatorname{Im}T=ColA=Sp\{(1,3),(-2,-8)\}=\mathbf{R}^2$ לכן T - טרנספורמציית על ,

הבסיס לתמונה הנו $\{(1,3),(-2,8)\}$, $\dim\operatorname{Im}T=2$

$KerT=NulA=Sp\{(-4,-1.5,1)\}$, בסיס לגרעין הנו $(-4,-1.5,1)$, $\dim KerT=1$

והטרנספורמציה אינה חד-חד-ערכית .

5. $T:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}^2$ - סיבוב המישור ביחס לראשית הצירים ב - 90 מעלות נגד כוון השעון

א) מצא הצגה סטנדרטית של ההעתקה באמצעות מטריצה A

ב) מצא בסיס ומימד לתמונה $\operatorname{Im}T$ וגרעין $KerT$ של T

ג) האם T היא על ו/או חח"ע – נמק את תשובתך

<u>פתרון</u> א. $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

ב,ג) $\operatorname{Im}T=ColA=Sp\{(0,1),(-1,0)\}=\mathbf{R}^2$ לכן T - טרנספורמציית על

הבסיס לתמונה הנו $\{(0,1),(-1,0)\}$, $\dim\operatorname{Im}T=2$

$KerT=NulA=\{\bar{0}\}$ לכן הטרנספורמציה היא חד-חד-ערכית

לגרעין (מרחב האפס) אין בסיס ו- $\dim KerT=0$

6. העתקה $T:\mathbf{R}_3[t]\mapsto\mathbf{R}_3[t]$ המוגדרת על ידי $T(f(t))=f(1)\cdot t^2+f'(-1)\cdot t+f(0)$

לכל $f(t)\in\mathbf{R}_3[t]$

א) הוכח כי העתקה ליניארית

ב) מצא הצגה סטנדרטית של ההעתקה באמצעות מטריצה A

ג) מצא בסיס ומימד לתמונה $\operatorname{Im}T$ וגרעין $KerT$ של T

ד) האם T היא על ו/או חח"ע – נמק את תשובתך

פתרון א)לכל $f(t),g(t)\in\mathbf{R}_3[t]$ ולכל $C\in\mathbf{R}$ מתקיים

$$T(f(t)+g(t))=(f(1)+g(1))\cdot t^2+(f'(-1)+g'(-1))\cdot t+f(0)+g(0)=$$

$$f(1)\cdot t^2+f'(-1)\cdot t+f(0)+g(1)\cdot t^2+g'(-1)\cdot t+g(0)=T(f(t))+T(g(t))$$

$$T(Cf(t))=Cf(1)\cdot t+Cf'(-1)\cdot t+Cf(0)=C\cdot(f(1)\cdot t^2+f'(-1)\cdot t+f(0))=CT(f(t))$$

לכן ההעתקה ליניארית

ב) $E=\{\bar{e}_1=t^2,\bar{e}_2=t,\bar{e}_3=1\}$

$$T(t^2)=t^2-2t\Rightarrow[T(t^2)]_E=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\ T(t)=t^2+t\Rightarrow[T(t)]_E=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ T(1)=t^2+1\Rightarrow[T(1)]_E=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A=([T(t^2)]_E[T(t)]_E[T(1)]_E)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ג,ד) נדרג את המטריצה $A\mapsto\ldots\mapsto I$

$ColA=\mathbf{R}^3\Rightarrow\operatorname{Im}T=\mathbf{R}_3[t]$ לכן T - טרנספורמציית על

הבסיס לתמונה הנו $E=\{\bar{e}_1=t^2,\bar{e}_2=t,\bar{e}_3=1\}$, $\dim\operatorname{Im}T=3$

לכן הטרנספורמציה היא חד-חד-ערכית $NulA=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow KerT=\{0\}$

לגרעין (מרחב האפס) אין בסיס ו- $\dim KerT=0$

7. העתקה $T:\mathbf{R}_3[t]\mapsto\mathbf{R}_3[t]$ המוגדרת על ידי המטריצה

$$A=\left([T(t^2)]_E\,[T(t)]_E\,[T(1)]_E\right)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$

א) מצא בסיס ומימד לתמונה $\operatorname{Im}T$ וגרעין $KerT$ של T

ב) האם T היא על ו/או חח"ע – נמק את תשובתך

פתרון - נדרג את המטריצה $A\mapsto\ldots\mapsto\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$

$$ColA=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow \operatorname{Im}T=Span\{t^2+2t+3\}$$

הבסיס לתמונה הנו $\{t^2+2t+3\}$, $\dim\operatorname{Im}T=1$

לכן T - אינה טרנספורמציית על

$$NulA=Span\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow KerT=Span\{-t^2+t,-t^2+1\}$$

הבסיס לגרעין הנו $\{-t^2+t,-t^2+1\}$, $\dim\ker T=2$

לכן הטרנספורמציה אינה חד-חד-ערכית