שיעור 9 *מרחבים ליניאריים(המשך)*

משפט 10 *קבוצה* $\mathbf{W}$ *של איברים במרחב וקטורי* $\mathbf{F}^n$ *מעל שדה* $\mathbf{F}$ *היא תת מרחב של* $\mathbf{V}$
אם ורק אם $\mathbf{W}$ *מהווה פתרון כללי למערכת משוואות ליניאריות הומוגנית*

$$\mathbf{W}=\{v\in\mathbf{F}^n : A\cdot v=b\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbf{F}^n:\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbf{F}^n:\left\{\begin{matrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=0\\\dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=0\end{matrix}\right\}\right\}$$

תרגיל 7 *ב-*$\mathbf{R}^3$ *מעל* $\mathbf{R}$ *נתונים ווקטורים* $a=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

מצאו את מערכת משוואות ליניאריות הומוגניות כך ש-4 וקטורים הנתונים הם פיתרונות שלה
פתרון *נדרג את מטריצת השורות*

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&4\\0&-1&-2\\1&1&3\end{pmatrix}\to\dots\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow Span\{a,b,c,d\}=Span\{(1,0,1),(0,1,2)\}$$

נמצא תנאי (בשיטת השורות) לכך ש-$Span\{(1,0,1),(0,1,2),(x_1,x_2,x_3)\}=Span\{(1,0,1),(0,1,2)\}$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\to\dots\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&x_3-x_1-2x_2\end{pmatrix}$$

מכאן המערכת המבוקשת מסתכמת במשוואה $x_3-x_1-2x_2=0$

תרגיל 8 *ב-*$\mathbf{R}^4$ *מעל* $\mathbf{R}$ *נתונים ווקטורים* $a=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\5\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}0\\1\\3\\-2\end{pmatrix}$

מצאו את מערכת משוואות ליניאריות הומוגניות כך ש-4 וקטורים הנתונים הם פיתרונות שלה
פתרון *מצא תנאי (בשיטת השורות) לכך ש-*
$Span\{(1,0,1,5),(0,1,3,-2),(x_1,x_2,x_3,x_4)\}=Span\{(1,0,1,5),(0,1,3,-2)\}$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&5\\0&1&3&-2\\x_3&x_2&x_3&x_4\end{pmatrix}\to\dots\to\begin{pmatrix}1&0&1&5\\0&1&3&-2\\0&0&-x_1-3x_2+x_3&-5x_1+2x_2+x_4\end{pmatrix}$$

מכאן המערכת המבוקשת הנה $\begin{cases}-x_1-3x_2+x_3=0\\-5x_1+2x_2+x_4=0\end{cases}$

משפט 11

כל הטענות הבאות שקולות *(כל אחת גוררת את כל השאר ולהפך – אי קיום של כל אחת גורר אי קיום של כל השאר):*

א. מטריצה A שקולת שורות למטריצה B עד כדי שורות האפסים
(ניתן לקבל את A מ- B על ידי פש"א ומחיקה/הוספה של שורות אפסים בלבד)

ב. מטריצה B שקולת שורות למטריצה A עד כדי שורות האפסים
(ניתן לקבל את B מ- A על ידי פש"א ומחיקה/הוספה של שורות אפסים בלבד)

ג. $RowA = RowB$

ד. $NulA = NulB$

ה. *שתי המטריצות A,B שקולות שורות* **עד כדי שורות האפסים** *לאותה מטריצה קנונית*

(שימוש מעשי – בדיקת שוויון תתי מרחב בשיטת השורות)

תרגיל 9 במרחב $\mathbf{R}^4$ נתונות 3 קבוצת הוקטורים

$$A=\{\bar{a}_1=(5,4,5,-3),\ \bar{a}_2=(1,4,1,1),\ \bar{a}_3=(1,0,1,-1),\ \bar{a}_4=(3,4,2,-2)\}$$

$$B=\{\dot{b}_1=(1,0,1,-1),\ \dot{b}_2=(1,4,1,-1),\ \dot{b}_3=(2,2,2,-2),\ \dot{b}_4=(3,1,3,-3)\}$$

$$C=\{\bar{c}_1=(2,2,2,-1),\ \bar{c}_2=(1,2,1,0),\ \bar{c}_3=(4,6,4,-1)\}$$

בדוק האם $SpanA=SpanB$, $SpanB=SpanC$ ו- $SpanA=SpanC$?

פתרון

נרשום את וקטורים של כל קבוצה בנפרד בשורות מטריצות ונדרג אותן עד למצב קנוני

$$A:\begin{pmatrix}5&4&5&-3\\1&4&1&1\\1&0&1&-1\\3&4&3&-1\end{pmatrix}\mapsto\ldots\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&0.5\end{pmatrix}$$

$$B:\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\1&4&1&-1\\2&2&2&-2\\3&1&3&-3\end{pmatrix}\mapsto\ldots\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$C:\begin{pmatrix}2&2&2&-1\\1&2&1&0\\4&6&4&-1\end{pmatrix}\mapsto\ldots\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&0.5\end{pmatrix}$$

תתי המרחב שווים עם ורק אם מטריצות השורות שקולות לאותה מטריצה קנונית בדיוק

לכן $SpanA=SpanC\neq SpanB$

הגדרה 14 *יהיו* $\mathbf{W}_1,\mathbf{W}_2$ *- תתי מרחב של במרחב ליניארי* $\mathbf{V}$ *מעל שדה* $\mathbf{F}$

***החיתוך** של תתי המרחב הוא קבוצת האיברים המשותפים לשני תתי המרחב*

$\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\bar{u} : \bar{u} \in \mathbf{W}_1 \text{ וגם } \bar{u} \in \mathbf{W}_2\}$

***הסכום** של תתי המרחב הוא קבוצת סכומי הווקטורים*

$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \{\bar{u}_1 + \bar{u}_2 : \bar{u}_1 \in \mathbf{W}_1, \bar{u}_2 \in \mathbf{W}_2\}$

משפט 12 *(מציאת בסיס לסכום של תתי מרחב בשיטת השורות או עמודות)*

יהיו $\mathbf{W}_1 = SpanA_1, \mathbf{W}_2 = SpanA_2$ *- תתי מרחב של במרחב ליניארי* $\mathbf{V}$ *מעל שדה* $\mathbf{F}$

אזי $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = Span(A_1 \cup A_2)$

תרגיל 10 *במרחב* $\mathbf{R}^4$ *נתונות 2 קבוצת הוקטורים (כל אחת בת"ל)*

$A = \{\bar{a}_1 = (1,0,1,-1), \bar{a}_2 = (1,4,1,1)\}$

$B = \{\bar{b}_1 = (1,1,1,-1), \bar{b}_2 = (1,3,1,1)\}$

מצא בסיס ומימד לסכום חיתוך של תתי מרחב $SpanA$ *ו-* $SpanB$

פתרון *– נדרג עד למצב קנוני את מטריצת העמודות*

$$(\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{b}_1\ \bar{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \ldots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1\} \text{ בת"ל} \\ \bar{b}_2 = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{b}_1 \end{cases}$$

בסיס לסכום $SpanA + SpanB$ *הנו* $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1\}$ *והמימד = 3*

$\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *לכן בסיס לחיתוך* $SpanA \cap SpanB$ *הנו* $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ *והמימד = 1*

משפט 13 *(משפט המימד) יהיו* $\mathbf{W}_1,\mathbf{W}_2$ *- תתי מרחב של במרחב ליניארי* $\mathbf{V}$ *מעל שדה* $\mathbf{F}$

אזי $\dim(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = \dim \mathbf{W}_1 + \dim \mathbf{W}_2 - \dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2)$

משפט 14 *(שימושי להוכחות שונות)*

יהיו $\mathbf{W}_1,\mathbf{W}_2$ *- תתי מרחב של במרחב ליניארי* $\mathbf{V}$ *מעל שדה* $\mathbf{F}$ *. אזי **כל הטענות הבאות שקולות***

(כל אחת גוררת את כל השאר ולהפך – אי קיום של כל אחת גורר אי קיום של כל השאר):

א. $\mathbf{W}_1 \subseteq \mathbf{W}_2$

ב. $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1$

ג. $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_2$

ד. $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_2$

משפט 14 *(שימושי להוכחות שונות)*

יהיו $\mathbf{W}_1,\mathbf{W}_2$ *- תתי מרחב של במרחב ליניארי* $\mathbf{V}$ *מעל שדה* $\mathbf{F}$

אם $\mathbf{W}_1 \subseteq \mathbf{W}_2$ *ו-* $\dim \mathbf{W}_1 = \dim \mathbf{W}_2$ *אז* $\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2$

תרגיל 11 במרחב $\mathbf{R}^n$ נתונות 2 קבוצת הוקטורים $A=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2\}$ ו- $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2\}$ (כל אחת בת"ל)

דירגו עד למצב קנוני את מטריצת העמודות $\left(\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{b}_1\,\bar{b}_2\right)\to\ldots\begin{pmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&7\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$

מצא בסיס ומימד לסכום חיתוך של תתי מרחב $SpanA$ ו- $SpanB$

פתרון – מהמטריצה הקנונית ניתן להסיק $\begin{cases}\{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{b}_1\}\ \text{בת"ל}\\ \bar{b}_2=-5\bar{a}_1+7\,\bar{a}_2-3\bar{b}_1\end{cases}$ לכן

בסיס לסכום $SpanA+SpanB$ הנו $\{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{b}_1\}$ והמימד = 3

$3\bar{b}_1+\bar{b}_2=-5\bar{a}_1+7\,\bar{a}_2$ לכן בסיס לחיתוך $SpanA\cap SpanB$ הנו $\{3\bar{b}_1+\bar{b}_2\}$ (או $\{-5\bar{a}_1+7\,\bar{a}_2\}$) והמימד = 1

תרגיל 12 במרחב $\mathbf{R}^n$ נתונות 2 קבוצת הוקטורים $A=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2\}$ ו- $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2\}$ (כל אחת בת"ל)

דירגו עד למצב קנוני את מטריצת העמודות $\left(\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{b}_1\,\bar{b}_2\right)\to\ldots\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

מצא בסיס ומימד לסכום חיתוך של תתי מרחב $SpanA$ ו- $SpanB$

פתרון – מהמטריצה הקנונית ניתן להסיק $\begin{cases}\{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{b}_2\}\ \text{בת"ל}\\ \bar{b}_2=2\bar{a}_1+3\bar{a}_2\end{cases}$ לכן

בסיס לסכום $SpanA+SpanB$ הנו $\{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{b}_2\}$ והמימד = 3

בסיס לחיתוך $SpanA\cap SpanB$ הנו $\{\bar{b}_2\}$ והמימד = 1

תרגיל 13 במרחב $\mathbf{R}^n$ נתונות 2 קבוצת הוקטורים $A=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2\}$ ו- $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2\}$ (כל אחת בת"ל)

דירגו עד למצב קנוני את מטריצת העמודות $\left(\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{b}_1\,\bar{b}_2\right)\to\ldots\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&2&5\end{pmatrix}$

מצא בסיס ומימד לסכום חיתוך של תתי מרחב $SpanA$ ו- $SpanB$

פתרון – מהמטריצה הקנונית ניתן להסיק $\begin{cases}\bar{b}_1=\bar{a}_1+2\,\bar{a}_2\\ \bar{b}_2=3\bar{a}_1+5\,\bar{a}_2\end{cases}$ לכן $SpanA\supseteq SpanB$

A,B בת"ל לכן $\dim SpanA=\dim SpanB=2$ לכן $SpanA=SpanB$

בסיס לסכום וחיתוך $SpanA+SpanB=SpanA\cap SpanB=SpanA=SpanB$ הנו $\{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2\}$ (או $\{\bar{b}_1,\ \bar{b}_2\}$)
והמימד = 2

תרגיל 14 במרחב $\mathbf{R}^n$ נתונות 2 קבוצת הוקטורים $A=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}$ ו- $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\}$ (כל אחת בת"ל)

דירגו עד למצב קנוני את מטריצת העמודות $\left(\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3\,\bar{b}_1\,\bar{b}_2\,\bar{b}_3\right)\to\ldots\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&2\\0&1&0&0&0&3\\0&0&1&0&0&-2\\0&0&0&1&0&-5\\0&0&0&0&1&4\end{pmatrix}$

מצא בסיס ומימד לסכום חיתוך של תתי מרחב $SpanA$ ו- $SpanB$

פתרון – מהמטריצה הקנונית ניתן להסיק $\begin{cases}\{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\bar{a}_3,\ \bar{b}_1,\bar{b}_2\}\ \text{בת"ל}\\ \bar{b}_3=2\bar{a}_1+3\bar{a}_2-2\bar{a}_3-5\bar{b}_1+4\bar{b}_2\end{cases}$ לכן

בסיס לסכום $SpanA+SpanB$ הנו $\{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\bar{a}_3,\ \bar{b}_1,\bar{b}_2\}$ והמימד = 5

$5\bar{b}_1-4\bar{b}_2+\bar{b}_3=2\bar{a}_1+3\bar{a}_2-2\bar{a}_3$ לכן בסיס לחיתוך $SpanA\cap SpanB$ הנו $\{5\bar{b}_1-4\bar{b}_2+\bar{b}_3\}$

(או $\{2\bar{a}_1+3\bar{a}_2-2\bar{a}_3\}$) ומימד = 1

תרגיל 15 במרחב $\mathbf{R}^n$ נתונות 2 קבוצת הוקטורים $A=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}$ ו- $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\}$ (כל אחת בת"ל)

דירגו עד למצב קנוני את מטריצת העמודות $\left(\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3\,\bar{b}_1\,\bar{b}_2\,\bar{b}_3\right)\to\ldots\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&2\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&2&3\\0&0&0&1&-3&-2\end{pmatrix}$

מצא בסיס ומימד לסכום חיתוך של תתי מרחב $SpanA$ ו- $SpanB$

פתרון – מהמטריצה הקנונית ניתן להסיק $\begin{cases}\{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\bar{a}_3,\ \bar{b}_1\}\ \text{בת"ל}\\ \bar{b}_2=\bar{a}_1+\bar{a}_2+2\bar{a}_3-3\bar{b}_1\\ \bar{b}_3=2\bar{a}_1-\bar{a}_2+3\bar{a}_3-2\bar{b}_1\end{cases}$ לכן

בסיס לסכום $SpanA+SpanB$ הנו $\{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\bar{a}_3,\ \bar{b}_1\}$ והמימד = 4

$\begin{cases}3\bar{b}_1+\bar{b}_2=\bar{a}_1+\bar{a}_2+2\bar{a}_3\\ 2\bar{b}_1+\bar{b}_3=2\bar{a}_1-\bar{a}_2+3\bar{a}_3\end{cases}$ לכן בסיס לחיתוך $SpanA\cap SpanB$ הנו $\{3\bar{b}_1+\bar{b}_2,2\bar{b}_1+\bar{b}_3\}$ ומימד = 2

תרגיל 16 במרחב $\mathbf{R}^n$ נתונות 2 קבוצת הוקטורים $A=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}$ ו- $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\}$ (כל אחת בת"ל)

דירגו עד למצב קנוני את מטריצת העמודות $\left(\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3\,\bar{b}_1\,\bar{b}_2\,\bar{b}_3\right)\to\ldots\begin{pmatrix}1&0&0&4&5&2\\0&1&0&2&4&3\\0&0&1&1&-1&4\end{pmatrix}$

מצא בסיס ומימד לסכום חיתוך של תתי מרחב $SpanA$ ו- $SpanB$

פתרון – מהמטריצה הקנונית ניתן להסיק כי $SpanA\supseteq SpanB$

A,B בת"ל לכן $\dim SpanA=\dim SpanB=3$ לכן $SpanA=SpanB$

בסיס לסכום וחיתוך $SpanA+SpanB=SpanA\cap SpanB=SpanA=SpanB$ הנו $\{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3\}$ (או $\{\bar{b}_1,\ \bar{b}_2,\ \bar{b}_3\}$)

והמימד = 3