שיעור 8 מרחבים ליניאריים(המשך)

<u>הגדרה 10</u>

יהי $\mathbf{W}$ תת-מרחב של במרחב ליניארי $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$

קבוצה **סדורה** של איברים $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_m\}$ המקיימת את 2 התכונות הבאות

1. B **בלתי תלויה ליניארית** (בת"ל)
2. $\mathbf{W}=SpanB$

נקראת **בסיס** של תת-המרחב $\mathbf{W}$ ומספר m של וקטורים ב- B נקרא **המימד** $\dim\mathbf{W}=m$ של $\mathbf{W}$

<u>משפט 4</u>

יהי $\mathbf{W}$ תת-מרחב של במרחב ליניארי $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$ וידוע כי $\dim\mathbf{W}=m$

אזי קבוצת האיברים B ב- $\mathbf{W}$

א. מהווה **בסיס** ל- $\mathbf{W}$ אם ורק אם מתקיימות 2 מתוך 3 הטענות הבאות

1. B **בלתי תלויה ליניארית** (בת"ל)
2. $\mathbf{W}=SpanB$
3. מספר האיברים ב- B שווה ל- m בדיוק

ב. בכל בסיס ל- $\mathbf{W}$ יש בדיוק m איברים

ג. אם מספר האיברים בקבוצה A קטן ל- m אז $SpanA\subset\mathbf{W}$ (מוכל ממש) ,
בפרט - $SpanA\neq\mathbf{W}$

ד. אם מספר האיברים ב- A גדול ל- m אז B בהכרח **תלויה ליניארית** (בת"ל)

ה. לכל מרחב $\mathbf{W}\neq 0$ מעל שדה איסופי $\mathbf{F}$ יש אינסוף בסיסים שונים
(למרחב האפס אין בסיס והמימד שלו שווה ל – 0)

ו. כל איבר במרחב ניתן להציג בתור צירוף ליניארי **אחד ויחיד** של איברי הבסיס הנתון

<u>הגדרה 11</u>

א. הבסיס הסטנדרטי למרחב $\mathbf{F}^n$ *מעל שדה* $\mathbf{F}$ *הוא*

$$E=\left\{\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\...\\0\end{pmatrix},\bar{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\...\\0\end{pmatrix},...,\bar{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\...\\1\end{pmatrix}\right\}$$ *(המימד* $\dim_{\mathbf{F}}\mathbf{F}^n=n$*)*

לדוגמה – הבסיסי הסטנדרטי למרחב $\mathbf{R}^2$ *מעל שדה* $\mathbf{R}$ *(או* $\mathbf{C}^2$ *מעל* $\mathbf{C}$ *)*

$$E=\left\{\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\bar{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$ *(*$\dim_{\mathbf{R}}\mathbf{R}^2=\dim_{\mathbf{C}}\mathbf{C}^2=2$*)*

הבסיסי הסטנדרטי למרחב $\mathbf{R}^3$ *מעל שדה* $\mathbf{R}$ *(או* $\mathbf{C}^3$ *מעל* $\mathbf{C}$ *)*

$$E=\left\{\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\bar{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\bar{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$ *(*$\dim_{\mathbf{R}}\mathbf{R}^3=\dim_{\mathbf{C}}\mathbf{C}^3=3$*)*

ב. הבסיס הסטנדרטי *למרחב* $\mathbf{F}^{m\times n}$ *מעל שדה* $\mathbf{F}$ *הוא*

$$E=\bar{e}_{11}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&...&0\\0&0&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&0\end{pmatrix},\bar{e}_{12}=\begin{pmatrix}0&1&...&0\\0&0&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&0\end{pmatrix},...,\bar{e}_{mn}=\begin{pmatrix}0&0&...&0\\0&0&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&1\end{pmatrix}\right\}$$

(המימד $\dim_{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{m\times n}=m\cdot n$*)*

לדוגמה – הבסיסי הסטנדרטי למרחב $\mathbf{R}^{2\times2}$ *מעל שדה* $\mathbf{R}$ *(או* $\mathbf{C}^{2\times2}$ *מעל* $\mathbf{C}$ *)*

$$E=\left\{\bar{e}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\bar{e}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\bar{e}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\bar{e}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$ *(*$\dim_{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{2\times2}=\dim_{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{2\times2}=4$*)*

ג. הבסיס הסטנדרטי למרחב $\mathbf{F}_n[t]$ *מעל שדה* $\mathbf{F}$ *הוא* $E=\{\bar{e}_1=t^{n-1},\bar{e}_2=t^{n-2},...,\bar{e}_n=1\}$

(המימד $\dim_{\mathbf{F}}\mathbf{F}_n[t]=n$*)*

לדוגמה – הבסיסי הסטנדרטי למרחב $\mathbf{R}_4[t]$ *(מעל שדה* $\mathbf{R}$*)*

$$E=\left\{\bar{e}_1=t^3,\bar{e}_2=t^2,\bar{e}_3=t,\ \bar{e}_4=1\right\}$$ *(*$\dim_{\mathbf{R}}\mathbf{R}_4[t]=4$*)*

ד. הבסיס הסטנדרטי למרחב $\mathbf{C}^n$ *מעל שדה* $\mathbf{R}$ *הוא*

$$E=\left\{\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\...\\0\end{pmatrix},\bar{e}_2=\begin{pmatrix}i\\0\\...\\0\end{pmatrix},\ \bar{e}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\...\\0\end{pmatrix},\ \bar{e}_4=\begin{pmatrix}0\\i\\...\\0\end{pmatrix},...,\bar{e}_{2n-1}=\begin{pmatrix}0\\0\\...\\1\end{pmatrix},\bar{e}_{2n}=\begin{pmatrix}0\\0\\...\\i\end{pmatrix}\right\}$$

(המימד $\dim_{\mathbf{R}}\mathbf{C}^n=2n$ *לעומת* $\dim_{\mathbf{C}}\mathbf{C}^n=n$*)*

לדוגמה – הבסיסי הסטנדרטי למרחב $\mathbf{C}^2$ *מעל שדה* $\mathbf{R}$

$$E=\left\{\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\bar{e}_2=\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix},\ \bar{e}_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \bar{e}_4=\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\right\}$$ *(*$\dim_{\mathbf{R}}\mathbf{C}^2=4$*)*

הגדרה 12

יהיו $\mathbf{W}$ - תת-מרחב של במרחב ליניארי $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$, $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_m\}$ - בסיס של $\mathbf{W}$ ו- $\bar{v}\in\mathbf{W}$ איבר.

נציג את $\bar{v}$ בתור צירוף ליניארי אחד ויחיד של איברי B: $\bar{v}=x_1\bar{b}_1+x_2\bar{b}_2+...+x_m\bar{b}_m$

ה-m-יה הסדורה של המקדמים $(x_1,x_2,...,x_m)$ נקראת **וקטור הקואורדינאטות** של $\bar{v}$ ביחס לבסיס B

נסמן זאת $[\bar{v}]_B=(x_1,x_2,...,x_m)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\...\\x_m\end{pmatrix}$

דוגמא 1

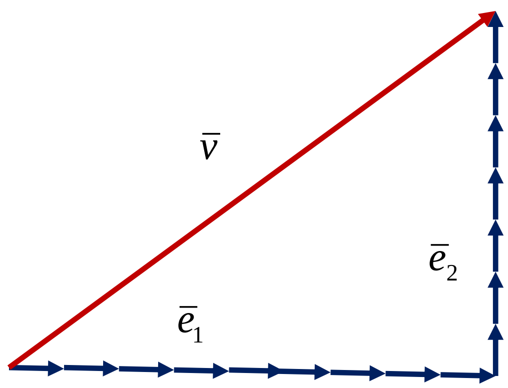
נתבונן ב- 2 בסיסים $B=\{\bar{b}_1=(1,2),\bar{b}_2=(3,1)\},E=\{\bar{e}_1=(1,0),\bar{e}_2=(0,1)\}$ של מרחב $\mathbf{R}^2$ מעל שדה $\mathbf{R}$

נתון $[\bar{v}]_B=(3,2)$ אזי $\bar{v}=3\bar{b}_1+2\bar{b}_2=3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\8\end{pmatrix}$

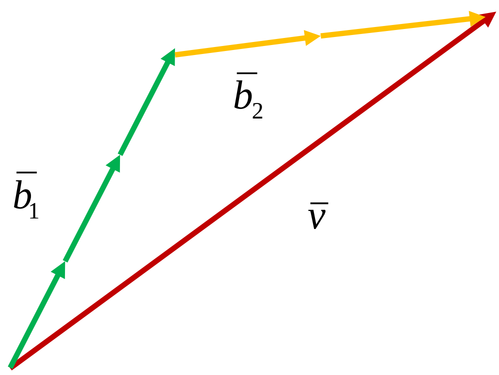
מאידך $\bar{v}=\begin{pmatrix}9\\8\end{pmatrix}=9\bar{e}_1+8\bar{e}_2$ לכן $\bar{v}=\begin{pmatrix}9\\8\end{pmatrix}=[\bar{v}]_E$

פירוש גיאומטרי

$[\bar{v}]_E=\begin{pmatrix}9\\8\end{pmatrix}=\bar{v}$ - וקטור $\bar{v}$ "בנוי" מ-9 ו-8 יחידות "סטנדרטיות" $\bar{e}_1,\bar{e}_2$



$[\bar{v}]_B=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ - וקטור $\bar{v}$ "בנוי" מ-3 ו-2 יחידות "לא סטנדרטיות" $\bar{b}_1,\bar{b}_2$



דוגמא 2 במרחב $\mathbf{Q}^4$ מעל שדה $\mathbf{Q}$ נתונים

$\bar{v}=\begin{pmatrix}6\\-5\\4\\3\end{pmatrix}$ והבסיס הסטנדרטי $E=\left\{\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\bar{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\bar{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\bar{e}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

אזי $\begin{pmatrix}6\\-5\\4\\3\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ כלומר $\bar{v}=6\bar{e}_1-5\bar{e}_2+4\bar{e}_3+3\bar{e}_4$ לכן $[\bar{v}]_E=\begin{pmatrix}6\\-5\\4\\3\end{pmatrix}=\bar{v}$

משפט 5 $[\bar{v}]_E=\bar{v}$ לכל $\bar{v}\in\mathbf{F}^n$ מעל שדה $\mathbf{F}$

דוגמא 3 במרחב $\mathbf{R}^{2\times2}$ מעל שדה $\mathbf{R}$ נתונים

$\bar{v}=\begin{pmatrix}6&-5\\4&3\end{pmatrix}$ והבסיס הסטנדרטי $E=\left\{\bar{e}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\bar{e}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\bar{e}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\bar{e}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

אזי $\begin{pmatrix}6&-5\\4&3\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

כלומר $\bar{v}=6\bar{e}_{11}-5\bar{e}_{12}+4\bar{e}_{21}+3\bar{e}_{22}$ לכן $[\bar{v}]_E=\begin{pmatrix}6\\-5\\4\\3\end{pmatrix}$

דוגמא 4 במרחב $\mathbf{Q}_4[t]$ מעל שדה $\mathbf{Q}$ נתונים

$\bar{v}=6t^3-5t^2+4t+3$ והבסיס הסטנדרטי $E=\{\bar{e}_1=t^3,\bar{e}_2=t^2,\bar{e}_3=t,\ \bar{e}_4=1\}$

אזי $\bar{v}=6\bar{e}_1-5\bar{e}_2+4\bar{e}_3+3\bar{e}_4$ לכן $[\bar{v}]_E=\begin{pmatrix}6\\-5\\4\\3\end{pmatrix}$

דוגמא 5 במרחב $\mathbf{C}^2$ מעל שדה $\mathbf{R}$ נתונים

$\bar{v}=\begin{pmatrix}6-5i\\4+3i\end{pmatrix}$ והבסיס הסטנדרטי $E=\left\{\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\bar{e}_2=\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix},\ \bar{e}_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \bar{e}_4=\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\right\}$

אזי $\bar{v}=6\bar{e}_1-5\bar{e}_2+4\bar{e}_3+3\bar{e}_4$ לכן $[\bar{v}]_E=\begin{pmatrix}6\\-5\\4\\3\end{pmatrix}$

הערה במקרים כאשר לא מציינים שדה מעליו מוגדר מרחב מתכוונים לשדה ה"טבעי" שלו - לדוגמא
"מרחב $\mathbf{F}^n$" הכוונה ל- "מרחב $\mathbf{F}^n$ מעל שדה $\mathbf{F}$"
"מרחב $\mathbf{F}^{m\times n}$" הכוונה ל- "מרחב $\mathbf{F}^{m\times n}$ מעל שדה $\mathbf{F}$"
"מרחב $\mathbf{F}_n[t]$" הכוונה ל- "מרחב $\mathbf{F}_n[t]$ מעל שדה $\mathbf{F}$"

משפט 6

יהיו $\mathbf{W}$ - תת-מרחב של במרחב ליניארי $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$ ו- $\dim \mathbf{W}=m$

אזי לכל איבר $\bar{v}\in \mathbf{W}$ מתקיים $[\bar{v}]_B \in \mathbf{F}^m$ בכל בסיס $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_m\}$ (בפרט $[\bar{0}]_B=\bar{0}\in \mathbf{F}^m$)

משפט 7 (איזומורפיזם בין כל מרחב למרחב $\mathbf{F}^n$)

יהיו $\mathbf{V}$ מרחב ליניארי מעל שדה $\mathbf{F}$

$B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_n\}$ בסיס של $\mathbf{V}$ $(\dim \mathbf{V}=n)$

$\mathrm{A}=\{\bar{\mathrm{a}}_1,\bar{\mathrm{a}}_2,...,\bar{\mathrm{a}}_\mathrm{k}\}$ - קבוצה לא ריקה של איברים ב- $\mathbf{V}$

אזי

א. $\mathrm{A}=\{\bar{\mathrm{a}}_1,\bar{\mathrm{a}}_2,...,\bar{\mathrm{a}}_\mathrm{k}\}$ בת"ל

אם ורק אם

$[A]_B=\{[\bar{a}_1]_B,[\bar{a}_2]_B,...,[\bar{a}_k]_B\}$ בת"ל

ב. קיים צירוף ליניארי $\bar{u}=x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2+...+x_k\bar{a}_k$

אם ורק אם

קיים צירוף ליניארי $[\bar{u}]_B=x_1[\bar{a}_1]_B+x_2[\bar{a}_2]_B+...+x_k[\bar{a}_k]_B$

(עם אותם המקדמים בהתאמה)

דוגמא 6 במרחב $\mathbf{Q}_4[t]$ מעל שדה $\mathbf{Q}$ (הבסיס הסטנדרטי $E=\{\bar{e}_1=1,\bar{e}_2=t,\bar{e}_3=t^2,\bar{e}_4=t^3\}$)

נתונים קבוצת הפולינומים $A=\left\{f_1=1-t+t^2-t^3,\ f_2=2+3t^3\right\}$

א. על מנת להראות כי קבוצה A בת"ל מספיק להראות כי קבוצת וקטורי הקואורדינאטות

$$[A]_E=\{[f_1]_E,[f_2]_E\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$$ בת"ל

ב. נגדיר פולינום $g=3f_1+4f_2\ =11-3t+3t^2+9t^3$ אזי $[g]_E=\begin{pmatrix}11\\-3\\3\\9\end{pmatrix}$

ניתן לראות כי $3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\0\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-3\\3\\9\end{pmatrix}$ כלומר $[g]_E=3[f_1]_E+4[f_2]_E$

נגדיר תת מרחב $U=SpanA=Span\{f_1,\ f_2\}$ של מרחב $\mathbf{Q}_4[t]$ מעל שדה $\mathbf{Q}$ $(\dim U=2)$

$$g=3f_1+4f_2\Rightarrow [g]_A=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

תרגיל 1 נתונה קבוצת המטריצות

$$B=\left\{\bar{b}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ \bar{b}_2=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix},\ \bar{b}_3=\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix},\ \bar{b}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

במרחב ליניארי $\mathbf{R}^{2\times 2}$ מעל שדה $\mathbf{R}$

א. הראה כי B בת"ל
ב. האם B מהווה בסיס ל- $\mathbf{R}^{2\times 2}$ - נמק את תשובתך
ג. נתונה $\bar{u}=\begin{pmatrix}4&5\\4&3\end{pmatrix}$, מצא את $[\bar{u}]_B$
ד. הצג את $\bar{u}$ כצירוף ליניארי של איברי B
ה. מצא את $\bar{w}$ אם נתון כי $[\bar{w}]_B=(-1,3,1,2)$

פתרון 1 (ללא שימוש באיזומורפיזם)

א. יש לפתור את המשוואה

$$x_1\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

ההופכת לאחר החישוב ל-

$$\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3+x_4 & x_1+2x_2+x_3+x_4\\ x_1+x_2+3x_3+x_4 & x_1+x_2+x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

משוואה זאת שקולה למערכת של 4 משוואות עם 4 משתנים

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_1+x_2+3x_3+x_4=0\\ x_1+2x_2+x_3+x_4=0\\ x_1+x_2+x_3\quad\ =0\end{cases}\quad \text{עם הצגה מטריצית}\quad \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-R1+R2\\-R1+R3\\-R1+R4}]{}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

כבר בשלב של מטריצה מדורגת ניתן לראות כי הפתרון היחיד למערכת ולכן גם למשוואה ממנה התחלנו הנו $x_1=x_2=x_3=x_4=0$ ולכן B בת"ל.

ב. B בת"ל ומכילה בדיוק 4 איברים, $\dim\mathbf{R}^{2\times 2}=4$ לכן B מהווה בסיס ל- $\mathbf{R}^{2\times 2}$

ג. *לפי הגדרה יש לפתור את המשוואה*

$$x_1\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\4&3\end{pmatrix},$$

ההופכת לאחר החישוב ל-

$$\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3+x_4 & x_1+2x_2+x_3+x_4\\ x_1+x_2+3x_3+x_4 & x_1+x_2+x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\4&3\end{pmatrix},$$

משוואה זאת שקולה למערכת של 4 משוואות עם 4 משתנים

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=4\\ x_1+x_2+3x_3+x_4=5\\ x_1+2x_2+x_3+x_4=4\\ x_1+x_2+x_3\qquad=3\end{cases}$$ *עם הצגה מטריצית* $$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&4\\1&2&1&1&5\\1&1&3&1&4\\1&1&1&0&3\end{array}\right).$$

נדרג את המטריצה

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&4\\1&2&1&1&5\\1&1&3&1&4\\1&1&1&0&3\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{-R1+R2\\-R1+R3\\-R1+R4}]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&4\\0&1&0&0&1\\0&0&2&0&0\\0&0&0&-1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{R3/2\\-R4}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&4\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{-R2-R3-R4+R1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{array}\right)$$

ולכן $[\bar{u}]_B=(2,1,0,1)$

ד. $\bar{u}=2\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_4$ *או בצורה מפורטת* $2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\4&3\end{pmatrix}$

ה. $\bar{w}=-\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&8\\5&3\end{pmatrix}$

פתרון 2 (תוך שימוש באיזומורפיזם)

$[\bar{u}]_E=(4,5,4,3)$, $[B]_E=\{(1,1,1,1),\ (1,2,1,1),\ (1,1,3,1),\ (1,1,1,0)\}$

כאשר E הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^{2\times2}$. נדרג את המטריצה – נרשום את כל וקטורי הקואורדינאטות בעמודות המטריצה

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&4\\1&2&1&1&5\\1&1&3&1&4\\1&1&1&0&3\end{array}\right)\to\dots\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{array}\right)$$

א. $[B]_E$ בת"ל לכן B בת"ל

ב. B בת"ל ומכילה 4 וקטורים בדיוק בהתאם ל- $\dim\mathbf{R}^{2\times2}=4$ לכן היא בסיס ל- $\mathbf{R}^{2\times2}$

ג. $[\bar{u}]_B=\left[[\bar{u}]_E\right]_{[B]_E}=(2,1,0,1)$

ד,ה – הפתרון זהה לפתרון 1

תרגיל 2

נתונה קבוצת המטריצות $A=\left\{\bar{a}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ \bar{a}_2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix},\ \bar{a}_3=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix},\ \bar{a}_4=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\right\}$

במרחב ליניארי $\mathbf{R}^{2\times2}$ מעל שדה $\mathbf{R}$

א. הראה כי A ת"ל והצג לפחות אחד האיברים בקבוצה כצירוף ליניארי של שאר איברי הקבוצה

ב. מצאו בסיס B לתת-מרחב של $\mathbf{R}^{2\times2}$ הנפרש על ידי A ולכל איבר ב- A מצאו את וקטור הקואורדינאטות שלו בבסיס B

ג. נתון $\bar{u}=\begin{pmatrix}4&5\\4&3\end{pmatrix}$, מצא את $[\bar{u}]_B$

ד. מצא את $\bar{w}$ אם נתון כי $[\bar{w}]_B=(-7,3)$

פתרון לפי הבסיס הסטנדרטי E של $\mathbf{R}^{2\times2}$ נקבל

$[\bar{u}]_E=(4,5,4,3)$, $[A]_E=\{(1,1,1,1),(2,2,2,2),(1,2,1,0),(1,0,1,2)\}$

נדרג את מטריצת העמודות $\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&4\\1&2&2&0&5\\1&2&1&1&4\\1&2&0&2&3\end{array}\right)\to\dots\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&2&3\\0&0&1&-1&1\end{array}\right)$

א. A ת"ל, $2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix},\ 2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$

ב. $B=\left\{\bar{a}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ \bar{a}_3=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\right\}$, $[\bar{a}_1]_B=(1,0),\ [\bar{a}_2]_B=(2,0),\ [\bar{a}_3]_B=(0,1),\ [\bar{a}_4]_B=(2,-1)$

ג. $[\bar{u}]_B=(3,1)$

ד. $\bar{w}=-7\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-1\\-4&-7\end{pmatrix}$

תרגיל 3 במרחב ליניארי $\mathbf{R}_4[t]$ מעל שדה $\mathbf{R}$ נתונה קבוצת הפולינומים

$$A=\{\bar{a}_1=t^3+t^2+t+1,\bar{a}_2=2t^3+2t^2+2t+2,\bar{a}_3=t^3+2t^2+t,\bar{a}_4=t^3+t+2\}$$

א. הראה כי A ת"ל והצג לפחות אחד האיברים בקבוצה כצירוף ליניארי של שאר איברי הקבוצה ,

ב. מצאו בסיס B לתת-מרחב של $\mathbf{R}_4[t]$ הנפרש על ידי A

ולכל איבר ב- A מצאו את וקטור הקואורדינאטות שלו בבסיס B

ג. נתון $\bar{u}=4t^3+5t^2+4t+3$, מצא את $[\bar{u}]_B$

ד. מצא את $\bar{w}$ אם נתון כי $[\bar{w}]_B=(-7,3)$

פתרון (שימו לב לדמיון בינו לבין פתרון תרגיל 2) לפי הבסיס הסטנדרטי E של $\mathbf{R}_4[t]$ נקבל

$$[\bar{u}]_E=(4,5,4,3)\,,\ [A]_E=\{(1,1,1,1),(2,2,2,2),(1,2,1,0),(1,0,1,2)\}$$

נדרג את מטריצת העמודות

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)\to\dots\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

א. A ת"ל, $2(t^3+t^2+t+1)=2t^3+2t^2+2t+2,\ 2(t^3+t^2+t+1)-(t^3+2t^2+t)=t^3+t+2$

ב. $B=\left\{\bar{a}_1=t^3+t^2+t+1,\ \bar{a}_3=t^3+2t^2+t\right\}$

$$[\bar{a}_1]_B=(1,0),\ [\bar{a}_2]_B=(2,0),\ [\bar{a}_3]_B=(0,1),\ [\bar{a}_4]_B=(2,-1)$$

ג. $[\bar{u}]_B=(3,1)$,

ד. $\bar{w}=-7(t^3+t^2+t+1)+3(t^3+2t^2+t)=-4t^3-t^2-4t-7$

תרגיל 4 נתונה קבוצת האיברים בת"ל $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3,\bar{b}_4\}$ במרחב ליניארי **V** ממימד לא ידוע מעל שדה **R**
(לדוגמא – מרחב של כל הפונקציות הרציפות עם מימד אינסופי ו- $B=\{\sin t,\cos t,e^t,t\}$)

א. הראה כי קבוצת האיברים $K=\{\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3+\bar{b}_4,\bar{b}_1+2\bar{b}_2+\bar{b}_3+\bar{b}_4,\bar{b}_1+\bar{b}_2+3\bar{b}_3+\bar{b}_4,\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3\}$ אף היא בת"ל

ב. נתון הצג את $\bar{u}=4\bar{b}_1+5\bar{b}_2+4\bar{b}_3+3\bar{b}_4$ כצירוף ליניארי של איברי B

ג. הראה כי $A=\{\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3+\bar{b}_4,\ 2\bar{b}_1+2\bar{b}_2+2\bar{b}_3+2\bar{b}_4,\ \bar{b}_1+2\bar{b}_2+\bar{b}_3,\ \bar{b}_1+\bar{b}_3+2\bar{b}_4\}$ ת"ל והצג לפחות אחד האיברים בקבוצה כצירוף ליניארי של שאר איברי הקבוצה.

פתרון(שימו לב לדמיון בינו לבין פתרונות התרגילים הקודמים) נגדיר תת-מרחב $U=SpanB$ של **V**
אזי $B=\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3,\bar{b}_4\}$ תהיה בסיס ל- U. נציג את כל הנתונים כוקטורי הקואורדינאטות לפי בסיס B

$$[\bar{u}]_B=(4,5,4,3),[K]_B=\{(1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,3,1),(1,1,1,0)\}$$

נשאר רק לדרג את מטריצת העמודות

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&4\\1&2&1&1&5\\1&1&3&1&4\\1&1&1&0&3\end{array}\right)\to\ldots\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{array}\right)$$

א. $[K]_B$ בת"ל לכן K בת"ל

ב. $\bar{u}=2\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_4$ או בצורה מפורטת

$$2(\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3+\bar{b}_4)+(\bar{b}_1+2\bar{b}_2+\bar{b}_3+\bar{b}_4)+(\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3)=4\bar{b}_1+5\bar{b}_2+4\bar{b}_3+3\bar{b}_4$$

ג. באופן דומה $[A]_B=\{(1,1,1,1),(2,2,2,2),(1,2,1,0),(1,0,1,2)\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&1&4\\1&2&2&0&5\\1&2&1&1&4\\1&2&0&2&3\end{array}\right)\to\ldots\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&2&3\\0&0&1&-1&1\end{array}\right)$$

A ת"ל, $2(\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3+\bar{b}_4)=2\bar{b}_1+2\bar{b}_2+2\bar{b}_3+2\bar{b}_4,\ 2(\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3+\bar{b}_4)-(\bar{b}_1+2\bar{b}_2+\bar{b}_3)=\bar{b}_1+\bar{b}_3+2\bar{b}_4$

הגדרה 13 לכל מטריצה עם רכיבים משדה $\mathbf{F}$

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

מגדירים שלושה תתי המרחבים

1. מרחב העמודות של המטריצה A הנו תת המרחב של $\mathbf{F}^m$ הנפרש על ידי עמודות המטריצה

$$ColA=Span\{\bar{c}_1,\bar{c}_2,\dots,\bar{c}_n\}$$

כאשר

$$\bar{c}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\bar{c}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\dots,\bar{c}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. מרחב השורות של המטריצה A הנו תת-מרחב של $\mathbf{F}^n$ הנפרש על ידי שורות המטריצה

$$RowA=Span\{\bar{r}_1,\bar{r}_2,\dots,\bar{r}_n\}$$

כאשר

$$\begin{cases} \bar{r}_1=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n}) \\ \bar{r}_2=(a_{21},a_{22},\dots,a_{2n}) \\ \qquad\dots \\ \bar{r}_m=(a_{m1},a_{m2},\dots,a_{mn}) \end{cases}$$

3. מרחב הפתרונות של המטריצה A הנו הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה

$$P(A)=NulA=\{\bar{x}\in\mathbf{F}^n \mid A\cdot\bar{x}=\bar{0}\}$$

משפט 8 קבוצת השורות שאינו שורות האפסים של מטריצה **מדורגת** היא קבוצה בת"ל ולכן ומהוות בסיס ל- $RowA$ (שימוש מעשי – הגדרת בסיס בשיטת השורות)

תרגיל 5 במרחב $\mathbf{R}^4$ נתונה קבוצת הוקטורים

$$A=\{\bar{a}_1=(5,4,5,-3),\bar{a}_2=(1,4,1,1),\bar{a}_3=(1,0,1,-1),\bar{a}_4=(3,4,2,-2)\}$$

א. בדוק האם $\mathbf{K}$ ת"ל או בת"ל ומצא בסיס ומימד ומימד ל - $SpanA$

פתרון 1 נרשום את הוקטורים בעמודות המטריצה ונדרג אותה

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\mapsto\dots\mapsto\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A ת"ל מפני שהתקבלו שניתן להציג את $\bar{a}_3$ ואת $\bar{a}_4$ בתור צירופים ליניאריים של $\bar{a}_1$ ו- $\bar{a}_2$

הבסיס ל - $SpanA$ הו $\left\{\bar{a}_1=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},\bar{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ (וקטורים מקוריים המתאימים לעמודות המוביל במטריצה מדורגת)

$$\dim SpanA=2$$

פתרון 2 נרשום את הוקטורים בשורות המטריצה ונדרג אותה $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \ldots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

A ת"ל מפני שהתקבלו שורות האפסים(זה אומר שהייתה תלות ליניארית בין שורות המטריצה)
הבסיס ל - $SpanA$ הוא $\{(1,0,1,-1),(0,4,0,2)\}$(שורות המטריצה המדורגת בת"ל ופורשות את אותו תת המרחב)
$\dim SpanA = 2$

משפט 9 $\dim ColA = \dim RowA$ לכל מטריצה $A_{m\times n}$

הגדרה 14 המספר $\rho(A) = rankA = \dim ColA = \dim RowA$ נקרא **דרגת המטריצה**

משפט 10 לכל מטריצה $A_{m\times n}$ מתקיים
א. $\dim NulA + rankA = n$
ב. $NulA \oplus RowA = \mathbf{F}^n$
ג. $NulA \cap RowA = \{0\}$

($\oplus$ מסמן "סכום ישיר של תתי המרחב להם אין איברים משותפים מלבד איבר האפס)

תרגיל 6

מצא בסיסים ל- $ColA, RowA, NulA$ ואת $RankA$ עבור $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & 5 \\ 5 & 10 & -2 & 8 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

פתרון $A \mapsto \ldots \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

בסיס ל- $ColA$ הנו $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$(עמודות מקוריות)

בסיס ל- $RowA$ הנו $\{(1,2,0,0),(0,0,1,0)\}$ (שורות סופיות)

$RankA = \dim ColA = \dim RowA = 2$

$$NulA = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 = -2x_2 - 2x_4 \\ x_2 \in \mathbf{R} \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 \in \mathbf{R} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_2 \in \mathbf{R} \\ x_4 \in \mathbf{R} \end{matrix} \right\} = Span\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הבסיס ל- $NulA$ הנו $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ו- $\dim NulA = 2$

תרגילי בית

1. מצא בסיס ומימד לתת המרחב U של $\mathbf{R}^{2\times 2}$

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{pmatrix}\middle| a,b\in R\right\}$$

והגדר את וקטורי הקואורדינאטות (במידה ויש) של המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. מצא בסיס ומימד לתת המרחב U של $\mathbf{R}^{2\times 3}$

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b & a-2b \\ c & a+c & a+b+c \end{pmatrix}\middle| a,b,c\in R\right\}$$

והגדר את וקטורי הקואורדינאטות (במידה ויש) של המטריצות

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. מצא בסיס ומימד לתת המרחב U של $\mathbf{R}_4[t]$ והגדר את וקטורי הקואורדינאטות (במידה ויש)
לפולינומים $5t^2+t-6,\ t^2, t^2-1$:

א. $U=\{p(t)\in R_4(t) | \ p(0)=0\}$

ב. $U=\{p(t)\in R_4(t) | \ p(1)=0\}$

ג. $U=\{p(t)\in R_4(t) | \ \frac{dp}{dt}(1)=0\}$

ד. $U=\{p(t)\in R_4(t) | \ p(1)=p(-1)\}$

4. במרחב ליניארי $\mathbf{R}^{2\times 2}$ נתונה קבוצת המטריצות $B=\left\{\bar{b}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\bar{b}_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\bar{b}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

א. *הראה כי B בת"ל*

ב. *האם B מהווה בסיס ל- $\mathbf{R}^{2\times 2}$ - נמק את תשובתך*

ג. *נתונות 2 מטריצות* $\bar{u}_1=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix},\bar{u}_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ *, בדוק האם הן שייכות לתת-מרחב* $U=SpanB$

אם כן - מצא את $[\bar{u}_1]_B, [\bar{u}_2]_B$

א. *מצא את $\bar{w}$ אם נתון כי* $[\bar{w}]_B=(-1,3,1)$.

5. במרחב ליניארי $\mathbf{R}^{2\times 2}$ נתונה קבוצת המטריצות $B=\left\{\bar{b}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \bar{b}_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \bar{b}_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \bar{b}_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

א. *האם B מהווה בסיס ל- $\mathbf{R}^{2\times 2}$ - נמק את תשובתך*

ב. *נתונה* $\bar{u}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ *, מצא את* $[\bar{u}]_B$

ג. *מצא את $\bar{w}$ אם נתון כי* $[\bar{w}]_B=(-1,1,-2,2)$

6. במרחב ליניארי $\mathbf{R}^{2\times 2}$ נתונה קבוצת המטריצות

$$A=\left\{\bar{a}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ \bar{a}_2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix},\ \bar{a}_3=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix},\ \bar{a}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\right\}$$

א. הראה כי A ת"ל והצג לפחות אחד האיברים בקבוצה כצירוף ליניארי של שאר איברי הקבוצה

ב. מצא בסיס B לתת-מרחב של $\mathbf{R}^{2\times 2}$ הנפרש על ידי A ולכל איבר ב- A

מצא את וקטור הקואורדינאטות שלו בבסיס B

א. נתון $\bar{u}=\begin{pmatrix}-4&-4\\-4&3\end{pmatrix}$, מצא את $[\bar{u}]_B$

ב. מצא את $\bar{w}$ אם נתון כי $[\bar{w}]_B=(-2,4)$

7. במרחב ליניארי $\mathbf{R}_3[t]$ נתונה קבוצת הפולינומים $B=\left\{\bar{b}_1=t^2+t+1,\ \bar{b}_2=t^2+t,\ \bar{b}_3=t^2\right\}$

א. האם B מהווה בסיס ל- $\mathbf{R}_3[t]$ - נמק את תשובתך

ב. נתון $\bar{u}=-5t^2+4t+3$, מצא את $[\bar{u}]_B$

ג. הצג את $\bar{u}$ כצירוף ליניארי של איברי B

ד. מצא את $\bar{w}$ אם נתון כי $[\bar{w}]_B=(-1,-3,2)$

8. במרחב ליניארי $\mathbf{R}_4[t]$ נתונה קבוצת הפולינומים

$$A=\left\{\bar{a}_1=t^3+t^2+t+1,\ \bar{a}_2=t^2+t,\ \bar{a}_3=t^3+1,\ \bar{a}_4=-2t^3+2t^2+2t-2\right\}$$

א. מצא בסיס B של תת-מרחב $U=SpanA$ ומצא את וקטורי הקואורדינאטות של איברי A בבסיס B

ב. לכל אחד מאיברי הקבוצה $K=\{\bar{v}_1=2t^3-4t^2-4t+2, \bar{v}_2=-4t^2-4t, \bar{v}_3=t^3-4t^2-4t\}$

בדוק האם הוא שייך ל - U במידה וכן - מצא את וקטור הקואורדינאטות שלו בבסיס B

9. נתונה קבוצת האיברים בת"ל $B=\left\{\bar{b}_1,\ \bar{b}_2,\bar{b}_3,\bar{b}_4\right\}$ במרחב ליניארי $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{R}$

א. מצא בסיס B של תת-מרחב $U=SpanA$ ומצא את וקטורי הקואורדינאטות של איברי A בבסיס B, כאשר

$$A=\{\bar{a}_1=3\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3+2\bar{b}_4, \bar{a}_2=\bar{b}_3, \bar{a}_3=-3\bar{b}_1-\bar{b}_2-2\bar{b}_4, \bar{a}_4=2\bar{b}_3-2\bar{b}_4\}$$

ב. לכל אחד מאיברי הקבוצה

$$K=\{\bar{v}_1=3\bar{b}_1+\bar{b}_2+8\bar{b}_3-8, \bar{v}_2=\bar{b}_1+\bar{b}_2+2\bar{b}_3-2, \bar{v}_3=-4\bar{b}_3+6\}$$

בדוק האם הוא שייך ל - U, במידה וכן - מצא את וקטור הקואורדינאטות שלו בבסיס B

תשובות

1. $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\right\}$, $\left[\begin{pmatrix}1&3\\4&-2\end{pmatrix}\right]_B=(1,3)$, $\left[\begin{pmatrix}0&-4\\-4&4\end{pmatrix}\right]_B=(0,-4)$, $\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\notin U$

2. $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\right\}$, $\begin{pmatrix}2&-1&4\\-3&-1&0\end{pmatrix}\notin U$, $\left[\begin{pmatrix}2&-1&4\\-3&-1&-2\end{pmatrix}\right]_B=(2,-1,-3)$

3. א. $\dim U=3$, $B=\{t^3,t^2,t\}$, $t^2-1\notin U$, $\left[t^2\right]_B=(0,1,0)$, $5t^2+t-6\notin U$

ב. $\dim U=3$, $B=\{t^3-1,t^2-1,t-1\}$, $t^2\notin U$, $\left[t^2-1\right]_B=(0,1,0)$, $\left[5t^2+t-6\right]_B=(0,5,1)$

ג. $\dim U=3$, $B=\{t^3-3t,t^2-2t,1\}$, $t^2-1\notin U$, $t^2\notin U$, $5t^2+t-6\notin U$

ד. $\dim U=3$, $B=\{t^3-t,t^2,1\}$, $\left[t^2\right]_B=(0,1,0)$, $\left[t^2-1\right]_B=(0,1,-1)$, $5t^2+t-6\notin U$

4. ב. *לא, כי* $\dim\mathbf{R}^{2\times2}=4$ *ו-* B *מכילה רק 3 מטריצות*

ג. $[\bar v_2]_B=(1,0,-4)$, $[\bar v_1]_B=(2,-3,0)$, ד. $\bar w=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$

5. א. B *מהווה בסיס ל-* $\mathbf{R}^{2\times2}$ *- בת"ל ומכילה 4 מטריצות בדיוק*

א. $\left[\bar u\right]_B=(0,-1,1,4)$, *ג.* $\bar w=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$

6. א. A *ת"ל,* $\bar a_3=-\bar a_1$, $\bar a_2=2\bar a_1$

ב. $B=\{\bar a_1,\ \bar a_4\}$, $\left[\bar a_4\right]_B=(1,0)$, $\left[\bar a_3\right]_B=(-1,0)$, $\left[\bar a_2\right]_B=(2,0)$, $\left[\bar a_1\right]_B=(1,0)$,

ג. $\left[\bar u\right]_B=(-11,7)$, ד. $\bar w=\begin{pmatrix}2&2\\2&6\end{pmatrix}$

7. א. B *מהווה בסיס ל-* $\mathbf{R}_3[t]$ *- בת"ל ומכילה 3 פולינומים בדיוק*

ב. $\left[\bar u\right]_B=(3,1,-9)$, *ג.* $\bar w=-2t^2-4t-1$

8. א. *הבסיס ל-* U *הנו* $B=\{\bar a_1,\bar a_2\}$, $[\bar a_1]_B=(1,0),[\bar a_2]_B=(0,1),[\bar a_3]_B=(-1,1),[\bar a_4]_B=(2,-4)$

ב. $[\bar v_1]_B=(2,-6),[\bar v_2]_B=(0,-4),\bar v_3\notin U$

9. א. *הבסיס ל-* U *הנו* $B=\{\bar a_1,\bar a_2,\bar a_4\}$

$[\bar a_1]_B=(1,0,0),[\bar a_2]_B=(0,1,0),[\bar a_3]_B=(-1,1,0),[\bar a_4]_B=(0,0,1)$

ב. $[\bar v_1]_B=(1,-3,5),[\bar v_2]_B=(1,-3,2),\ [\bar v_3]_B=(0,2,-3)$