שיעור 7 מרחבים ליניאריים

__הגדרה 1__

מרחב ליניארי $\mathbf{V}$ *מעל שדה* $\mathbf{F}$ הוא קבוצה לא ריקה של איברים בה מוגדרות שתי פעולות – **חיבור** בין 2 איברים ו**הכפלת איבר בסקלר** מהשדה $\mathbf{F}$ באופן בו מתקיימות התכונות הבאות :

- תכונות החיבור
  1. סגירות $u,v\in\mathbf{V}\Rightarrow u+v\in\mathbf{V}$
  2. חילוף $u+v=v+u$ לכל $u,v\in\mathbf{V}$
  3. קיבוץ $(u+v)+w=u+(v+w)$ לכל $u,v,w\in\mathbf{V}$
  4. קיום איבר ניטראלי(אפס) 0 המקיים $u+0=u$ לכל $u\in\mathbf{V}$
  5. קיום איבר נגדי $(-u)$ לכל $u\in\mathbf{V}$ המקיים $u+(-u)=0$
- תכונות הכפל בסקלר
  6. סגירות $u\in\mathbf{V},\alpha\in\mathbf{F}\Rightarrow \alpha u\in\mathbf{V}$
  7. כפל באחת $1\cdot u=u$ לכל $u\in\mathbf{V}$ כאשר $1\in\mathbf{F}$
  8. קיבוץ $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$ לכל $u\in\mathbf{V}$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbf{F}$
- תכונות הפילוג
  9. $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$ לכל $u,v\in\mathbf{V}$ ולכל $\alpha\in\mathbf{F}$
  01. $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$ לכל $u\in\mathbf{V}$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbf{F}$

__הגדרה 2__

במרחב $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$ נתונה קבוצה לא ריקה של איברים $A=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k\}$. כל ביטוי מהצורה $x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2+\ldots+x_k\bar{a}_k$ כאשר $x_1,x_2,\ldots,x_k\in\mathbf{F}$

נקרא **צירוף ליניארי** של איברי הקבוצה A . וקטור $\bar{b}\in\mathbf{F}^n$ מהווה **צירוף ליניארי** של איברי הקבוצה A אם קיים פתרון(לפחות אחד) למשוואה $x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2+\ldots+x_k\bar{a}_k=\bar{b}$

__הגדרה 3__

במרחב $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$ נתונה קבוצה לא ריקה של איברים $A=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k\}$.

נאמר כי A **בלתי תלויה ליניארית** (בת"ל) אם ורק אם למשוואה

$$(*)\quad x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2+\ldots+x_k\bar{a}_k=\bar{0}\,(x_1,x_2,\ldots,x_k\in\mathbf{F})$$

קיים פתרון טריוויאלי בלבד $x_1=x_2=\ldots=x_k=0$

אחרת – למשוואה (*) קיים פתרון לא טריוויאלי(ולכן אינסוף פתרונות) –

נאמר כי A **תלויה ליניארית** (ת"ל)

__משפט 1__

A **תלויה ליניארית** אם ורק אם ניתן להציג לפחות אחד האיברים בקבוצה כצירוף ליניארי של שאר האיברים בקבוצה או אחד האיברים בקבוצה הוא איבר האפס

__הגדרה 4__

תהי $A=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k\}$ קבוצה לא ריקה של איברים במרחב $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$, הקבוצה של כל הצירופים האיבריים של איברי A

$$\underset{\mathbf{F}}{Span}\,A=\underset{\mathbf{F}}{Span}\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k\}=\{x_1\bar{a}_1+x_2\bar{a}_2+\ldots+x_k\bar{a}_k\,|\,x_1,x_2,\ldots,x_k\in\mathbf{F}\}$$

נקראת **פרישה ליניארית** של קבוצה A מעל שדה $\mathbf{F}$

__הגדרה 5__ מרחב ליניארי $\mathbf{F}^n$ *(כגון $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{Q}^n$, $\mathbf{C}^n$) מעל שדה* $\mathbf{F}$ *הוא אוסף של כל ה n-יות (אניות) הסדורות של הסקלרים מהשדה* $\mathbf{F}$ *(כל n - יה כזאת נקראת **וקטור** במרחב $\mathbf{F}^n$) עם פעולות*

- ***חיבור** בין 2 איברים - חיבור בין רכיבי האיברים בהתאמה*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \dots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

- ***הכפלת וקטור בסקלר -** הכפלת כל רכיב הווקטור סקלר מהשדה* $\mathbf{F}$

$$\alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \dots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

- *וקטור האפס* $\bar{0} = (0,0,\dots,0)$

__תרגיל 1__ *במרחב ליניארי* $\mathbf{C}^2$ *מעל שדה* $\mathbf{C}$ *נתונים וקטורים* $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 5 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2-3i \\ -1+2i \end{pmatrix}$

מצא את הצירוף הליניארי $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\,\bar{a}_2$ *כאשר* $\alpha_1 = 1-2i,\ \alpha_2 = 3$

פתרון

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\,\bar{a}_2 = (1-2i)\begin{pmatrix} 2-3i \\ -1+2i \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -i \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-7i \\ 3+4i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3i \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-10i \\ 18+4i \end{pmatrix}$$

__הגדרה 6__ מרחב ליניארי $\mathbf{C}^n$ *מעל שדה* $\mathbf{R}$

אוסף של כל ה n-יות (אניות) הסדורות של הסקלרים מהשדה $\mathbf{C}$ *עם פעולות*

- ***חיבור** בין 2 וקטורים - חיבור בין רכיבי האיברים בהתאמה*
- ***הכפלת וקטור בסקלר -** הכפלת כל רכיב הווקטור בסקלר מהשדה* $\mathbf{R}$

  (ההבדל היחיד בין- $\mathbf{C}^n$ *מעל שדה* $\mathbf{C}$ *לבין* $\mathbf{C}^n$ *מעל שדה* $\mathbf{R}$*)*
- *וקטור האפס* $\bar{0} = (0,0,\dots,0)$

__דוגמא__ *הפעולה* $i\begin{pmatrix} 2+i \\ 3-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2i \\ 2+3i \end{pmatrix}$ *מוגדרת ב-* $\mathbf{C}^2$ *מעל שדה* $\mathbf{C}$ *אך אינה מוגדרת מעל שדה* $\mathbf{R}$

לכן קבוצת הוקטורים $\left\{\begin{pmatrix} 2+i \\ 3-2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1+2i \\ 2+3i \end{pmatrix}\right\}$ *תלויה ליניארית ב-* $\mathbf{C}^2$ *מעל שדה* $\mathbf{C}$

ובלתי תלויה ליניארית ב- $\mathbf{C}^2$ *מעל שדה* $\mathbf{R}$

<u>הגדרה 7</u> מרחב ליניארי $\mathbf{F}^{m\times n}$ (כגון $\mathbf{R}^{m\times n}$, $\mathbf{Q}^{m\times n}$, $\mathbf{C}^{m\times n}$) מעל שדה $\mathbf{F}$:

אוסף של כל מטריצות $m\times n$ (מספר שורות שווה ל- m , מספר עמודות שווה ל- n)
כאשר רכיבי המטריצות הם הסקלרים מהשדה $\mathbf{F}$ (כל מטריצה כזאת נקראת **איבר** במרחב $\mathbf{F}^{m\times n}$)
עם פעולות

- **חיבור** בין 2 איברים - חיבור בין רכיבי האיברים בהתאמה

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

- **הכפלת איבר בסקלר -** הכפלת כל רכיב האיבר סקלר מהשדה $\mathbf{F}$

$$\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

- איבר האפס $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

<u>תרגיל 2</u> במרחב ליניארי $\mathbf{Q}^{2\times 2}$ מעל שדה $\mathbf{Q}$ נתונים איברים $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

מצא את הצירוף הליניארי $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\ \bar{a}_2$ כאשר $\alpha_1 = -2,\ \alpha_2 = 3$

פתרון

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\ \bar{a}_2 = -2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ -15 & 15 \end{pmatrix}$$

<u>הגדרה 8</u> מרחב ליניארי $\mathbf{F}_n[t]$ (כגון $\mathbf{R}_n[t]$, $\mathbf{Q}_n[t]$, $\mathbf{C}_n[t]$) מעל שדה $\mathbf{F}$:

אוסף של כל הפולינומים ממעלה קטנה ממש מ- n

(פונקציות פולינומיות מהצורה $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1}t^{n-1}$)

במשתנה t ומקדמים $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ מהשדה $\mathbf{F}$ (כל פולינום כזה נקרא **איבר** במרחב $\mathbf{F}_n[t]$) עם

- **חיבור** בין 2 איברים -

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1}t^{n-1} + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_{n-1}t^{n-1} =$$
$$a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1})t^{n-1}$$

- **הכפלת איבר בסקלר -** הכפלת כל רכיב האיבר בסקלר מהשדה $\mathbf{F}$

$$\alpha\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1}t^{n-1}\right) = \alpha a_0 + \alpha a_1 t + \alpha a_2 t^2 + \dots + \alpha a_{n-1}t^{n-1}$$

- איבר האפס $f(t) \underset{t}{\equiv} 0 = 0 + 0t + 0t^2 + \dots + 0t^{n-1}$

<u>תרגיל 3</u> במרחב ליניארי $\mathbf{R}_3[t]$ מעל שדה $\mathbf{R}$ נתונים איברים $f_1(t)=5-t+4t^2,\ f_2(t)=3-t^2$

מצא את הצירוף הליניארי $\alpha_1 f_1+\alpha_2\ f_2$ כאשר $\alpha_1=-2,\ \alpha_2=3$

פתרון

$$\alpha_1 f_1+\alpha_2\ f_2=-2\left(5-t+4t^2\right)+3\left(3-t^2\right)=-1+2t-11t^2$$

<u>הגדרה 9</u>

תהי $\mathbf{W}$ תת קבוצה של מרחב ליניארי $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$

$\mathbf{W}$ נקראת **תת מרחב** של $\mathbf{V}$ במידה ו- $\mathbf{W}$ בעצמה מהווה מרחב ליניארי מעל אותו השדה $\mathbf{F}$

(מקיימת את כל התכונות של הגדרה 1 – ביניהן $0\in\mathbf{W}$ כלומר $\mathbf{W}\neq\varnothing$)

בפרט – מרחב $\mathbf{V}$ עצמו ומרחב האפס $0=\{\bar{0}\}$ הם תתי מרחב (טריוויאליים) של מרחב $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$

<u>משפט 2</u>

קבוצה **לא ריקה** $\mathbf{W}$ של איברים במרחב ליניארי $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$ היא תת מרחב של $\mathbf{V}$

אם ורק אם $\mathbf{W}$ סגורה ביחס לפעולות חיבור וכפל בסקלר של $\mathbf{V}$. במלים אחרות – כאשר

א. $0\in\mathbf{V}\Rightarrow 0\in\mathbf{W}$

ב. $u,v\in\mathbf{W}\Rightarrow u+v\in\mathbf{W}$

ג. $u\in\mathbf{W},\alpha\in\mathbf{F}\Rightarrow \alpha u\in\mathbf{W}$

<u>תרגיל 4</u> הוכח או הפרך(באמצעות דוגמה נגדית) את הטענה כי

קבוצה $\mathbf{W}$ מהווה תת מרחב של מרחב ליניארי $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$

א. $\mathbf{W}=\{(x,y)\mid x+y=1\},\mathbf{V}=\mathbf{R}^2,\mathbf{F}=\mathbf{R}$ ($\mathbf{W}$ אינה תת מרחב)

ב. $\mathbf{W}=\{(x,y)\mid x\cdot y\geq 0\},\mathbf{V}=\mathbf{R}^2,\mathbf{F}=\mathbf{R}$ ($\mathbf{W}$ אינה תת מרחב)

ג. $\mathbf{W}=\{(x,y)\mid x+y\geq 0\},\mathbf{V}=\mathbf{R}^2,\mathbf{F}=\mathbf{R}$ ($\mathbf{W}$ אינה תת מרחב)

ד. $\mathbf{W}=\{(x,y)\mid x+y=0\},\mathbf{V}=\mathbf{R}^2,\mathbf{F}=\mathbf{R}$ ($\mathbf{W}$ הינה תת מרחב)

ה. $\mathbf{W}=\left\{\begin{pmatrix}a+b & 2a\\ -b & a-b\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbf{Q}\right\},\mathbf{V}=\mathbf{Q}^{2\times 2},\mathbf{F}=\mathbf{Q}$ ($\mathbf{W}$ הינה תת מרחב)

ו. $\mathbf{W}=\{f(t)\in\mathbf{R}_3[t]\ f(1)=f(2)\},\mathbf{V}=\mathbf{R}_3[t],\mathbf{F}=\mathbf{R}$ ($\mathbf{W}$ הינה תת מרחב)

<u>משפט 3</u>

קבוצה $\mathbf{W}$ של איברים במרחב ליניארי $\mathbf{V}$ מעל שדה $\mathbf{F}$ היא תת מרחב של $\mathbf{V}$

אם ורק אם קיימת קבוצה **לא ריקה** $A=\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_k\}$ של איברים ב- $\mathbf{V}$ כך ש- $\underset{\mathbf{F}}{Span}\,A=\mathbf{W}$

<u>תרגיל 5</u> הוכח את הטענות ד'- ו' של תרגיל 4 תוך שימוש במשפט 3