פתרון בחינה בקורס חדו"א 2 להנדסת מכונות 24.07.2016

מרצה ד"ר מקסים ברשדסקי

שאלה 1 (20 נק') הקיפו בעיגול – נכון או לא נכון

א. (5 נק') אם טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ מתבדר אז גם טור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_k+\frac{1}{k}\right)$ בהכרח מתבדר

נכון / לא נכון (דוגמא נגדית $a_k=-\frac{1}{k}$)

ב. (5 נק') שלושת הוקטורים במרחב $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ הם קופלנאריים אם ורק אם מתקיים

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\left(\bar{c}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{a}$$

נכון / לא נכון ($\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=-\left(\bar{c}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{a}$ לכן $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$ ולכן $2\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=0$)

ג. (5 נק') פונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 &, (x,y)=(0,0)\end{cases}$ רציפה בנקודה $(0,0)$

נכון / לא נכון $\left(\underset{y=x,\,x\to0}{Lim}\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=2\neq0\right)$

ד. (5 נק') אם פונקציה $z=f(x,y)$ רציפה ושתי הנגזרות החלקיות שלה מוגדרות בנקודה (x_0,y_0) אז הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0)

נכון / לא נכון (שתי הנגזרות החלקיות צריכות להיות רציפות בנקודה)

שאלה 2 א. (10 נק') מצא את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^n}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(\ln x)^n}{\sqrt{n}}\right|}=\left|\ln x\right|<1\Rightarrow-1<\ln x<1\Rightarrow\frac{1}{e}<x<e$$ התכנסות בהחלט

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln e)^n}{\sqrt{n}}$ מתבדר (הרמוני מוכלל עם $\alpha=0.5$)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^n}{\sqrt{n}}$ מתכנס (לייבניץ)

תשובה $\frac{1}{e}\le x<e$

ב. (10 נק') מצא טור מקלורן עבור הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$

לכן $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ולכן $\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$ $\frac{x^2}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$

שאלה 3 א. (10 נק') מצא את כל נקודות הקיצון והאוכף של הפונקציה

$$f(x,y)=e^{-x}\left(2xy-y^2+2x-7\right)$$

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=e^{-x}\left(-2xy+y^2-2x+2y+9\right)=0 \\ f'_y(x,y)=e^{-x}(2x-2y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2+9=0 \\ x=y \end{cases}$$

נקודות חשודות $(3,3)$ ו- $(-3,-3)$

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y)=e^{-x}\left(2xy-y^2+2x-4y-11\right) \\ f''_{yy}(x,y)=-2e^{-x} \\ f''_{yx}(x,y)=e^{-x}(-2x+2y+2) \end{cases}$$

$\begin{cases} f''_{xx}(3,3)=-8e^{-3}<0 \\ f''_{yy}(3,3)=-2e^{-3}<0 \\ f''_{yx}(3,3)=2e^{-3}>0 \end{cases}$ לכן $(3,3)$ היא נקודת מקסימום

$\begin{cases} f''_{xx}(-3,-3)=4e^{3}>0 \\ f''_{yy}(-3,-3)=-2e^{3}<0 \end{cases}$ לכן $(-3,-3)$ היא נקודת אוכף

ב. (10 נק') מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה

$$f(x,y)=e^{-x}\left(2xy-y^2+2x-7\right)$$

בתוך המשולש ABC כאשר A(0,0),B(1,0),C(0,1)

נקודות פנימיות חשודות $(3,3)$ ו- $(-3,-3)$ (עפ"י סעיף א') אינן בתחום

$$f(x,0)=e^{-x}(2x-7)$$

שפה AB : $f'_x(x,0)=e^{-x}(-2x+9)=0\Rightarrow x=4.5$ אין נקודות בתחום

שפה AC : $f(0,y)=-y^2-7\Rightarrow f'_y(0,y)=-2y=0$ נקודה חשודה $(0,0)$ בתחום

$$f(x,1-x)=e^{-x}\left(-3x^2+6x-8\right)$$

שפה BC : $f'_x(x,0)=e^{-x}\left(3x^2-12x+14\right)=0\Rightarrow\varnothing$ אין שרשים למשוואה

לכן יש 3 נקודות חשודות $f(0,0)=-7$, $f(1,0)=-5e^{-1}$ $f(0,1)=-8$

$(0,1)$ היא נקודת מינימום ו- $(1,0)$ מקסימום מוחלטים

שאלה 4 א. (10 נק') חשב את אינטגרל $\iint_D \sqrt{\frac{y}{x}}dA$ כאשר $D:\left\{\frac{1}{x}\le y\le\frac{2}{x}, 3x\le y\le 5x, x>0, y>0\right\}$

נעבור לקואורדינטות $u=xy, v=\frac{y}{x}$

נחשב את היעקוביאן $\left|\begin{matrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{matrix}\right|^{-1}=\left(\frac{2y}{x}\right)^{-1}=\frac{1}{2v}$ לכן

$$\iint_D \sqrt{\frac{y}{x}}dA=\iint_R \sqrt{v}\,\frac{1}{2v}dudv\int_1^2 du\int_3^5\frac{dv}{2\sqrt{v}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$$ כאשר $R:\{1\le u\le 2, 3\le v\le 5\}$

ב. (10 נק') חשב את האינטגרל $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dydx$

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dydx=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cdot rdr=\int_0^{\pi/2}\frac{8\cos^3\theta}{3}d\theta=[\sin\theta=t]$$

$$\frac{8}{3}\int_0^1\left(1-t^2\right)dt=\frac{8}{3}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)_0^1=\frac{16}{9}$$

שאלה 5 א. (10 נק') חשב את האינטגרל $\iiint_G xyzdxdydz$ כאשר $G:\left\{x^2+y^2+z^2\le 4,\ z\ge\sqrt{3x^2+3y^2}, y\ge 0\right\}$

$$\iiint_G xyzdxdydz=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\pi/6}d\varphi\int_0^2\rho\sin\varphi\cos\theta\rho\sin\varphi\sin\theta\rho\cos\varphi\rho^2\sin\varphi d\rho=$$

$$\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\pi/6}\sin^3\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^2\rho^5 d\rho=\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\pi}\cdot\left.\frac{\sin^4\varphi}{4}\right|_0^{\pi}\cdot\left.\frac{\rho^6}{6}\right|_0^2=0$$

ב. (10 נק') מצאו את עבודתו של השדה

$$\vec{F}=(-2x\cos y+ye^{-xy}+2x)\vec{i}+\left(x^2\sin y+xe^{-xy}-3y^2\right)\vec{j}$$

לאורך המסילה $\vec{r}=\cos t\cdot\vec{i}+\sin t\cdot\vec{j}\ \ (0\le t\le\pi/2)$

$$(-2x\cos y+ye^{-xy}+2x)'_y=\left(x^2\sin y+xe^{-xy}-3y^2\right)_x=2x\sin y+e^{-xy}-xye^{-xy}$$

לכן השדה משמר. נמצא את הפוטנציאל

$$\Phi(x,y)=\int\left(-2x\cos y+ye^{-xy}+2x\right)dx=-x^2\cos y-e^{-xy}+x^2+C(y)$$

$$\Phi'_y(x,y)=x^2\sin y+xe^{-xy}+C'(y)=x^2\sin y+xe^{-xy}-3y^2\Rightarrow C(y)=-y^3$$

$$\Phi(x,y)=-x^2\cos y-e^{-xy}+x^2-y^3$$

לכן העבודה המבוקשת $\Phi(0,1)-\Phi(1,0)=-2+1=-1$

פתרון נוסף – תוך שימוש במשפט גרין

$$\iint_D\left(v'_x-u'_y\right)dxdy-\int_1^0 v(0,y)dy-\int_0^1 u(x,0)dy=0+\int_1^0 3y^2dy-\int_0^1 0dy=\left.y^3\right|_1^0=-1$$