טוגעוקטוגעוק

דף תרגילים 3 - פתרונות

חדו"א 2 להנדסת מכונות - סמסטר ב' תשע"ו

1. נגדיר $F(x,y) = 4x^3 - 3xy^2 + x^2y^3$ הפונקציה F היא פולינום ולכן בהכרח בעלת נגזרות חלקיות רציפות. לפי משפט הפונקציה הסתומה, המשוואה מגדירה פונקציה $y = \varphi(x)$ בסביבה של $(-1,1)$ אם $F'_y(-1,1) \neq 0$. נבדוק מתי מתקיים תנאי זה:

$$F'_y(x,y) = -6xy + 3x^2y^2$$
$$F'_y(-1,1) = 6 + 3 = 9 \neq 0$$

אכן המשוואה מגדירה פונקציה $y = \varphi(x)$ בסביבה של $(-1,1)$!

נמצא את φ', φ'':

לפי משפט הפונקציה הסתומה:

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{12x^2 - 3y^2 + 2xy^3}{-6xy + 3x^2y^2} =$$

בסביבה של $(-1,1)$, $x, y \neq 0$. לכן מהמשוואה

$$4x^3 - 3xy^2 + x^2y^3 = 0$$

מקבלים

$$4x^2 - 3y^2 + xy^3 = 0 \iff xy^3 = 3y^2 - 4x^2$$

לכן

$$\varphi'(x) = -\frac{12x^2 - 3y^2 + 2(3y^2 - 4x^2)}{-6xy + 3x^2y^2} = \frac{4x^2 + 3y^2}{6xy - 3x^2y^2}$$

ובנקודה $(-1,1)$:

$$\varphi(-1) = \frac{4\cdot 1^2 + 3\cdot(-1)^2}{6\cdot(-1)\cdot(1) - 3\cdot(-1)^2\cdot 1^2} = -\frac{7}{9}$$

נגזור שוב את ϕ' לפי x (כאשר $y=\phi(x)$):

$$\varphi''(x) =$$
$$\frac{(4x^2+3y^2)'(6xy-3x^2y^2)-(6xy-3x^2y^2)'(4x^2+3y^2)}{(6xy-3x^2y^2)^2} =$$
$$\frac{(8x+6yy')(6xy-3x^2y^2)-(6y+6xy'-(6xy^2+6x^2yy'))(4x^2+3y^2)}{(6xy-3x^2y^2)^2}$$

בנקודה $(-1,1)$

$$= \frac{(-8-6\cdot\frac{7}{9})(-6-3)-(6+6\cdot\frac{7}{9}+6+6\cdot\frac{7}{9})(4+3)}{(-6-3)^2} = -\frac{106}{243}$$

2. נגדיר

$.F(x,y,z) = \sin(xy)+\cos(xyz)-sin(xz)-cos(yz)$

זוהי הרכבה של פונקציות אלמנטריות, לכן בבירור בעלת נגזרות חלקיות רציפות.

נבדוק שתנאי הפונקציה הסתומה מתקיים:

$$\begin{aligned}F'_z(x,y,z) &= -xy\sin(xyz)-x\cos(xz)+y\sin(yz)|_{(1,\pi,0)}\\ &= -0-cos(0)+\pi\sin(0) = -1+0 = -1 \neq 0\end{aligned}$$

לכן לפי משפט הפונקציה הסתומה, בסביבה של $P(1,\pi,0)$ המשוואה $F(x,y,z)=0$ מגדירה פונקציה סתומה $z=f(x,y)$.

לחישוב הנגזרות החלקיות של f:

$$\begin{aligned}F'_x(x,y,z) &= y\cos(xy)-yz\sin(xyz)-z\cos(xz)\\ F'_x(1,\pi,0) &= \pi\cos(\pi)-0-0 = -\pi\\ F'_y(x,y,z) &= x\cos(xy)-xz\sin(xyz)+z\sin(yz)\\ F'_y(1,\pi,0) &= \cos(\pi)-0+0 = -1\end{aligned}$$

לפי משפט הפונקציה הסתומה:

$$f'_x(1,\pi) = -\frac{F'_x(1,\pi,0)}{F'_z(1,\pi,0)} = -\pi$$
$$f'_y(1,\pi) = -\frac{F'_y(1,\pi,0)}{F'_z(1,\pi,0)} = -1$$

3. (א) אם נגדיר $s = \frac{x-y}{x+y},\ t = \frac{x}{y}$ אז

$$s'_x = \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$
$$s'_y = \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$
$$t'_x = \frac{1}{y}$$
$$t'_y = -\frac{x}{y^2}$$

אז לפי כלל השרשרת:

$$z'_x = f'(s)\cdot s'_x + g'(t)\cdot t'_x + 1 =$$
$$f'(s)\cdot\frac{2y}{(x+y)^2} + f'(t)\cdot\frac{1}{y} + 1$$

$$z'_y = f'(s)\cdot s'_y + g'(t)\cdot t'_y =$$
$$f'(s)\cdot\frac{-2x}{(x+y)^2} - g'(t)\cdot\frac{x}{y^2}$$

אז

$$A = x\cdot z'_x + y\cdot z'_y - x =$$
$$= x\cdot\left(f'(s)\cdot\frac{2y}{(x+y)^2} + g'(t)\cdot\frac{1}{y} + 1\right) + y\cdot\left(f'(s)\cdot\frac{-2x}{(x+y)^2} + f'(t)\cdot\frac{x}{y^2}\right) - x =$$
$$= 0$$

ב) נגדיר $F(x,y,z) = f\left(\frac{x-y}{x+y}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right) + x - z$

$$F'_x = f'(s) \cdot \frac{2y}{(x+y)^2} + g'(t) \cdot \frac{1}{y} + 1$$

$$F'_y = f'(s) \cdot \frac{-2x}{(x+y)^2} - g'(t) \cdot \frac{x}{y^2}$$

$$F'_z = 1$$

בנקודה $M(1,1,3)$: $s=0, t=1$ אז

$$F'_y(1,1,3) = f'(0) \cdot \frac{-2}{4} - g'(1) \cdot \frac{1}{1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \neq 0$$

ולכן לפי משפט הפונקציה הסתומה, המשוואה מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x,z)$ וכן

$$F'_x(1,1,3) = f'(0) \cdot \frac{2}{4} + g'(1) \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$$
$$F'_z(1,1,3) = -1$$

אז

$$y'_x(1,3) = -\frac{F'_x(1,1,3}{F'_y(1,1,3)} = 2, \quad y'_z(1,3) = -\frac{F'_z(1,1,3}{F'_y(1,1,3)} = -1$$

כלומר $\nabla y(1,3) = (2,-1)$ אז הנגזרת הכיוונית בנקודה $(1,3)$ בכיוון $p = (-1,-3)$ (מנורמל):

$$D_p y(1,3) = (2,-1) \cdot \frac{(-1,-3)}{|(-1,-3)|} = \frac{(-2+3)}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

הנגזרת הכיוונית חיובית, לכן הפונקציה עולה בכיוון זה.

4. לפי משפט הפונקציה הסתומה:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right) \cdot \left(-\frac{F'_y}{F'_x}\right) \cdot \left(-\frac{F'_z}{F'_y}\right) = -1$$

5. ראשית נמצא נקודות חשודות לקיצון ע"י השוואת הגרדיאנט לאפס:

$$\nabla z = 0 \qquad \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{50}{x^2} = 0 \\ x = \frac{20}{y^2} = \frac{20}{\frac{2500}{x^4}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3 = 2500/20 = 125 = 5 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 50/25 = 2.$$

אז הנקודה החשודה היחידה היא $(5,2)$. נעזר במבחן הנגזרת השניה:

$$z''_{xx} = -(-2) \cdot \frac{50}{x^3} = 100/x^3|_{(5,2)} = 100/125 = 4/5$$

$$z''_{yy} = -(-2) \cdot \frac{20}{y^3} = 40/y^3|_(5,2) = 40/8 = 5$$

$$z''_{xy} = 1$$

$$\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4 > 0$$

וכן $z''_{xx} = 4/5 > 0$ ולכן, לפי מבחן הנגזרת השניה, הנקודה היא נקודת מינימום מקומי.

6. ראשית נמצא נקודות חשודות לקיצון ע"י השוואת הגרדיאנט לאפס:

$$\nabla f(x,y) = 0$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(1+e^y)\sin x = 0 \\ e^y \cos x - ye^y - e^y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x - 1 = y \end{cases}$$

$$x = 0 + \pi k$$

$$x = 0 + 2\pi k \Rightarrow y = cos(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$x = \pi + 2\pi k \Rightarrow y = cos(\pi) - 1 = -1 - 1 = -2$$

בכל מקרה, כל הנקודות מהצורה $(0+2\pi k,0)$ או $(\pi+2\pi k,-2)$ חשודות כנקודות קיצון

על מנת לסווג אותן נעזר במבחן הנגזרת השניה:

$$\begin{aligned}
&f''_{xx} = -(1+e^y)\cos x \\
&\Rightarrow f''_{xx}(0+2\pi k,0) = -(1+1)\cos 0 = -2 \\
&\Rightarrow f''_{xx}(\pi+2\pi k,-2) = -(1+e^{-2})\cos\pi = 1+e^{-2} \\
&f''_{yy} = e^y\cos x - ye^y - 2e^y \\
&\Rightarrow f''_{yy}(0+2\pi k,0) = e^0\cos 0 - 0 - 2e^0 = -1 \\
&\Rightarrow f''_{yy}(\pi+2\pi k,-2) = e^{-2}\cos(\pi) - (-2)e^{-2} - 2e^{-2} = -e^{-2} \\
&f''_{xy} = -e^y\sin x \\
&\Rightarrow f''_{xy}(0+2\pi k,0) = -e^0\sin 0 = 0 \\
&\Rightarrow f''_{xy}(\pi+2\pi k,-2) = -e^{-2}\sin(\pi) = 0
\end{aligned}$$

אז עבור הנקודות $(0+2\pi k,0)$:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

וכן $f''_{xx} = -2 < 0$ ולכן, לפי מבחן הנגזרת השניה, כל נקודה כזאת היא נקודת מקסימום מקומי.

עבור הנקודות $(\pi+2\pi k,-2)$

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{vmatrix} = -e^{-2} - e^{-4} < 0$$

ולכן כל הנקודות האלו הן נקודות אוכף.

עברנו על כל הנקודות ואין נקודות מקסימום.

7. בכל הסעיפים נעזר בשיטת כופלי לגרנז' ועל מנת למצוא נקודות חשודות תחת האילוץ, נחפש האם קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש- $\nabla z(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$ וכן

$g(x,y)=0$. כלומר פותרים את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} z'_x = \lambda g'_x \\ z'_y = \lambda g'_y \\ g = 0 \end{cases}$$

(א)

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה:

- או ש- $x = 0$ ואז $y = \pm\sqrt{8}$.
  במקרה הזה: $z(0,+\sqrt{8}) = +\sqrt{8},\ z(0,-\sqrt{8}) = -\sqrt{8}$
- או ש $\lambda = 1$ ואז $y = \frac{1}{2}$ ואז $x = \pm\sqrt{8-1/4} = \pm\sqrt{27}/2$.
  במקרה הזה $z(\pm\sqrt{27}/2, 1/2) = 27/4 + 2/4 = 29/4$.

עכשיו $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} < 2 \cdot 2 = 4 < 7 = 28/4 < 29/4$.

לכן $-\sqrt{8} < \sqrt{8} < 29/4$.

מכיוון שהתחום תחת האילוץ הוא תחום סגור וחסום, בהכרח מתקבל בו מינימום ומקסימום מוחלטים, שהם בהכרח $-\sqrt{8}$ ו- $29/4$ בהתאמה.

נשים לב שהנקודה השלישית חייבת להיות נקודת מינימום מוחלט ביחס לחצי מעגל אחד ומקסימום מוחלט ביחס לחצי מעגל שני, לכן לא יכולה להיות נקודת מינ/מקס מקומית.

(ב)

$$\begin{cases} 2x = \lambda x/9 \\ 2y = \lambda y/3 \\ \frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה:

- או ש- $x = 0$
ואז $y = 3 \iff y/3 = 1$.
- או ש $\lambda = 18 \iff 2 = \lambda/9$
ואז מהמשוואה השניה $y = 0 \iff 2y = 6y$
ואז $x = 9 \iff x/9 = 1$.

אז הנקודות החשודות הן $(9,0)$, $(0,3)$.

נבחן התנהגות ב"קצוות": כאשר $x \to \pm\infty$

אז $y = 1 - x/3 \to \mp\infty$.

והפונקציה $z(x,y) = x^2 + y^2 \to +\infty$ לכן, יש תחום סגור וחסום סביב כל אחת מהנקודות, שבו היא נקודת מינימום מוחלט בתחום זה ובפרט מינימום מקומי.

(ג)

$$\begin{cases} 1 = \lambda e^x \\ 1 = \lambda e^y \\ e^x + e^y = 1 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה והשניה נובע ש- $x = y \iff e^x = e^y$

ולכן מהמשוואה השלישית $x = \ln(1/2) \iff e^x = \frac{1}{2} \iff 2e^x = 1$

אז הנקודה החשודה היחידה היא $(\ln(1/2), \ln(1/2))$.

שוב, נבחן התנהגות ב"קצוות" (אינסוף):

נשים לב שמהאילוץ נובע ש- $x, y < 0$.

- כאשר $x \to 0$
אז $y = \ln(1 - e^x) \to -\infty$.
ואז $z(x,y) = x + y \to -\infty$.
- כאשר $x \to -\infty$
אז $y = \ln(1 - e^x) \to \ln(1) = 0$
ואז $z(x,y) = x + y \to -\infty$.

לכן בהכרח הנקודה $(\ln(1/2), \ln(1/2))$ היא נקודת מקסימום מקומי.

8. בכל הסעיפים בשאלה, D הוא תחום סגור וחסום. זה מיידי לפי הגדרה חוץ מבסעיף ג' שם נראה זאת.

לכן יש מינימום ומקסימום מוחלטים בתחום שיכולים להתקבל בפנים או בשפה של התחום.

כל נקודת קיצון מוחלט בפנים תהיה גם נקודת קיצון מקומית וכל נקודת קיצון מוחלט בשפה תהיה נקודת קיצון מקומית תחת אילוץ. כך נמצא נקודות חשודות בפנים ובשפה. בסופו של דבר הנקודה הכי גבוהה תהיה המקסימום והכי נמוכה המינימום.

(א) על מנת למצוא נקודות חשודות בפנים, נחפש נקודות חשודות לקיצון מקומי:

$$\nabla f(x,y)=0$$
$$\begin{cases} 2(x-4)=0 \\ 10(y+1)=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$$

נשים לב ש- $(4,-1)$ אינה בפנים אבל כן על השפה כי $4-1=3$ לכן היא על הישר $x+y=$

אז $(4,-1)$ נקודה חשודה וערכה

$f(4,-1)=0$.

אך אין נקודות חשודות בפנים.

יתר על כן, על הישר $x+y=3$:

כאשר $x\to\pm\infty$

נובע ש $y\to\mp\infty$.

לכן

$$f(x,y)=(x-4)^2+5(y+1)^2\to+\infty$$

אז

$(4,-1)$ היא מקסימום מוחלט על הישר הנ"ל, לכן אין טעם לבדוק נקודות חשודות נוספות.

נבדוק נקודות חשודות ב-3 הישרים הנוספים:

- $x=0$
אז הפונקציה היא $f(0,y)=16+5(y+1)^2$
ונקודות חשודות יתקבלו מלגזור את הפונקציה לפי y ולהשוות לאפס:
$$10(y+1)=0 \iff y=-1$$

אז $(0,-1)$ נקודה חשודה בישר זה ו-
$f(0,-1)=16$.

- $x=6$

אז הפונקציה היא $f(0,y)=4+5(y+1)^2$
ונקודות חשודות יתקבלו מלגזור את הפונקציה לפי y ולהשוות לאפס:
$10(y+1)=0 \iff y=-1$
אז $(6,-1)$ נקודה חשודה בישר אבל היא לא בתחום כי $6-1>3$.

- $y=0$

אז הפונקציה היא $f(x,0)=(x-4)^2$
ונקודות חשודות יתקבלו מלגזור את הפונקציה לפי x ולהשוות לאפס:
$2(x-4)=0 \iff x=4$
אז $(4,0)$ נקודה חשודה בישר נקודה חשודה בישר אבל היא לא בתחום.

- $y=-3$

אז הפונקציה היא $f(x,-3)=(x-4)^2+20$
ונקודות חשודות יתקבלו מלגזור את הפונקציה לפי x ולהשוות לאפס:
$2(x-4)=0 \iff x=4$
אז $(4,-3)$ נקודה חשודה בישר זה ו-
$f(4,-3)=20$.

בסה"כ הערך המקסימלי מתקבל ב $f(4,-1)=0$ והערך המינימלי מתקבל ב- $f(4,-3)=20$.

(ב) על מנת למצוא נקודות חשודות בפנים, נחפש נקודות חשודות לקיצון מקומי:

$$\nabla f(x,y)=0$$
$$\begin{cases} 8x^3-2x=0 \\ 4y^3-4y=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x(x^2-1/4)=0 \\ y(y^2-1)=0 \end{cases}$$

אז $x=0,\pm 1/2,\ \ y=0,\pm 1$
ולכן $(0,0),(1/2,0),(-1/2,0)$

נקודות חשודות בפנים (כל שאר הנקודות אינן בפנים).

$f(0,0)=0$

$.f(\pm 1/2,0)=-1/8$

בשביל למצוא נקודות חשודות בשפה, נעזר בכופלי לגרנז' כאשר האילוץ הוא $.g(x,y)=4x^2+y^2-1=0$

$$\begin{cases}\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\\ g(x,y)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}8x^3-2x=8\lambda x\\ 4y^3-4y=2\lambda y\\ 4x^2+y^2=1\end{cases}$$

- אם $x=0$
  אז $y=\pm 1$
- אם $y=0$
  אז $x=\pm 1/2$
- אם $x,y\neq 0$ אז מהמשוואות הראשונה והשניה נקבל
  $4x^2-2=4\lambda=8y^2-4$
  $.4x^2=8y^2-2$
  נציב במשוואה השלישית ונקבל:
  $9y^2-2=1$
  $y^2=1/3$
  $y=\pm 1/\sqrt{3}$
  אז $.x=\pm 1/\sqrt{6}$
  בסה"כ נקודות חשודות על בכל התחום:
  $(0,\pm 1),(\pm 1/2,0),(\pm 1/\sqrt{6},\pm 1/\sqrt{3})$
  $f(0,\pm 1)=-1$
  $f(\pm 1/2,0))=-1/8$
  $.f(\pm 1/\sqrt{6},\pm 1/\sqrt{3})=-1/3$
  אז הערך המקסימלי מתקבל ב- $f(\pm 1/2,0))=-1/8$
  והערך המינימלי מתקבל ב- $f(0,\pm 1)=-1$

(ג) נשים לב שאכן D תחום חסום:
$x^2\leq -y\leq 4$

אז $-2 < x < 2$.

$0 \leq -x^2 \leq y \leq -4$

אז $0 \leq y \leq -4$.

על מנת למצוא נקודות חשודות בפנים, נחפש נקודות חשודות לקיצון מקומי:

$$\nabla f(x,y) = 0$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = x = -1 \end{cases}$$

זוהי אינה נקודה בפנים, שכן

$y = -x^2$.

בשביל למצוא נקודות חשודות בשפה, נעזר בכופלי לגרנז'. נחלק לשני מקרים:

i. כאשר האילוץ הוא $g(x,y) = y + 4 = 0$.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2 - 2x = \lambda y \\ y = -4 \end{cases}$$

על הישר הנ"ל $(-4,-4)$ נקודה חשודה יחידה

אבל $-4^2 > -4$ לכן זוהי לא נקודה בתחום.

ii. כאשר האילוץ הוא $g(x,y) = y + x^2 = 0$.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = \lambda 2x \\ -2 - 2x = \lambda y \\ y = -x^2 \end{cases}$$

- אם $x = 0$ אז $y = 0$ ואז מהמשוואה השנייה $-2 = 0$ סתירה.
- אם $x \neq 0$
  מהצבת $y = -x^2$ במשוואה הראשונה נקבל
  $$2x + 2x^2 = \lambda 2x$$
  $$1 + x = \lambda$$
  נציב במשוואה השניה ונקבל:
  $$-2 - 2x = -x^2(1+x)$$
  $$2 = x^2$$
  אז $x = \pm\sqrt{2}, y = -2$.
  אלה נקודות חשודות יחידות ו-
  $$f(\pm\sqrt{2}, -2) = 2 + 4 \pm 4\sqrt{2} = 6 \pm 4\sqrt{2}$$

צריך גם לבדוק מה קורה בחיתוך העקומים:
$$y = -4, y = -x^2$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$
$$f(\pm 2, -4) = 4 + 8 \pm 8 = 12 \pm 8$$
אז הערך המקסימלי מתקבל ב-
$$f(2, -4) = 12 + 8 = 20$$
והערך המינימלי מתקבל ב-
$$f(-\sqrt{2}, -2) = 6 - 4\sqrt{2}$$

9. נעזר בכופלי לגרנז' למצוא מינימום לפונקציה
$$f(x,y) = x^2 + y^2 = 0$$
תחת האילוץ

.$g(x,y)=7x^2+8xy+y^2-45=0$

הערה: בעקרון צריך למצוא מינימום לפונקציה $\sqrt{x^2+y^2}$ אך מכיוון שהע-
לאה בריבוע היא מונוטונית בתחום האי-שלילי, זה שקול.

$$\begin{cases}\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\\ g(x,y)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x=\lambda(14x+8y)\\ 2y=\lambda(8x+2y)\\ 7x^2+8xy+y^2=45\end{cases}$$

הפתרונות של המערכת הזו הן

$y=\pm 1, x=2y$

כלומר $(1,2),(-1,-2)$

ושתיהן קרובות באותה מידה לראשית.

10. נעבור לפרמטיזציה לישר:

אם $x=t$

אז $y=6-t$

$z=y-10=6-t-10=-4-t$

אז פרמטיזציה נתונה ע"י $(t,6-t,-4-t)$.

נשים לב שהמשטח

$x^2+y^2+z^2-4z=0$

$x^2+y^2+z^2-4z+4-4=0$

.$x^2+y^2+(z-2)^2=4$

זהו מעגל מסביב לנקודה $(0,0,2)$ ברדיוס 2.

לכן כדי למצוא את הנקודה הכי קרובה למשטח על הישר, מספיק לראות
מהו הערך של t עבורו המרחק מ- $(t,6-t,-4-t)$ $(0,0,2)$ מינימלי.

המרחק בריבוע נתון ע"י

$t^2+(6-t)^2+(-4-t-2)^2=3t^2+72$

נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס:

$6t=0$

$t=0$

אז המרחק המינימלי מתקבל בנקודה

$(0,6,-4)$.

שם המרחק מהנקודה $(0,0,2)$ הוא

$\sqrt{72}$

ולכן המרחק מהמשטח הוא

$\sqrt{72}-2=6\sqrt{2}-2$.

11. גם פה נעבור לפרמטיזציה בעזרת נקודה וכיוון:

נקודה $(4,0,0)$

וכיוון $(0,6,4)-(4,0,0)=(-4,6,4)$

אז פרמטיזציה של הישר נתונה ע"י

$(4,0,0)+t(-4,6,4)=(4-4t,6t,4t)$.

פה המשטח הוא גליל מסביב לראשית ברדיוס 2 לכן כדי למצוא נקודה הכי קרובה בישר, מספיק למצוא מינימום לפונקציה

$(4-4t)^2+(6t)^2=16-32t+16t^2+36t^2=52t^2-32t+16=$

$=13t^2-8t+4$

כפונקציה של t.

נגזור ונשווה לאפס: $26t-8=0$

$t=4/13$.

ואז המרחק מהראשית (לפי מישור xy) הוא

$\sqrt{13(4/13)^2-8\cdot(4/13)+4}=\sqrt{\frac{136}{13}}$

ולכן המרחק מהגליל הוא $\sqrt{\frac{136}{13}}-2$.