חדו"א 2 להנדסת מכונות - שאלות הכנה למבחן - חלק 1

① סמנו את התשובות הנכונות לטענות הבאות: כן לא

א) אם $\bar{u}\cdot\bar{v}=0$ אז אחד מהווקטורים $\bar{u}$ ו- $\bar{v}$ שווה $\bar{0}$. ☐ ☐

ב) אם $\bar{u}\times\bar{v}=\bar{0}$ אז הווקטורים $\bar{u}$ ו- $\bar{v}$ תלויים לינארית ☐ ☐

ג) רדיוס ההתכנסות של טור חזקות בהכרח גדול מ- 0. ☐ ☐

ד) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס ☐ ☐

ה) פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אם ורק אם הנגזרות החלקיות של $f(x,y)$ רציפות ב- (x_0,y_0)! ☐ ☐

② סמנו את התשובה הנכונה לטענה:
לפונקציה $f(x,y)$ קיימות נגזרות מסדר 2 בסביבת הנקודה (x_0,y_0).
אם $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$ אז

א) אחת מהנגזרות $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ או $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ לא רציפה בסביבת (x_0,y_0).

ב) $f(x,y)$ לא דיפרנציאבילית ב- (x_0,y_0)

ג) $f(x,y)$ לא רציפה ב- (x_0,y_0)

ד) אחת מהנגזרות $\frac{\partial f}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}$ לא רציפה
ב- (x_0, y_0)

ה) אף תשובה לא נכונה

3) סמנו את התשובה הנכונה לשאלה:

האינטגרל הכפול $\iint_{\Omega} \left(x^{2015} + y^{2015}\right) dx\,dy$
מעל התחום $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ הינו:

א) שווה 0

ב) גדול מ- 0

ג) קטן מ- 0

ד) לא קיים

ה) אף תשובה לא נכונה.

4) קבעו האם הטור מתכנס בתנאי, בהחלט או מתבדר

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (-1)^n n + 1}$

ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \ln n}$

5) מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות

א) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(-1)^n\sqrt{n}+n}$$

ב) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$$

ג) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+(-1)^n n}$$

ד) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n+(-1)^n 3^n}$$

6) פתחו את $\ln(x+2)$ בטור טיילור סביב $x=0$
ומצאו את התחום בו טור טיילור מתכנס ל $\ln(x+2)$.

7) הוכיחו או הפריכו את הטענות

א) $$\bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w})=(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w}$$

ב) $$\bar{u}\times(\bar{u}\times\bar{v})=(\bar{v}\times\bar{u})\times\bar{u}$$

ג) $$\bar{u}\cdot(\bar{u}\times\bar{v})=\bar{v}\cdot(\bar{u}\times\bar{v})$$

ד) אם $\|\bar{u}\|=\|\bar{v}\|=\|\bar{w}\|=1$
ו $\bar{u}\times\bar{v}=\bar{w}$, $\bar{v}\times\bar{w}=\bar{u}$ ו $\bar{w}\times\bar{u}=\bar{v}$
אז $\bar{u}=\bar{i}$, $\bar{v}=\bar{j}$ ו $\bar{w}=\bar{k}$.

ה) אם $\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})\neq 0$ אז $\bar{u},\bar{v}$ ו $\bar{w}$
בלתי תלויים לינארית

8) נתונה הפונקציה $f(x,y)=3x^2+3y^2+4xy-2x+2y$

א) מצאו את נקודות האקסטרמום המקומי של $f(x,y)$

ב) מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של $f(x,y)$ במשולש שנפרש ע"י הקדקודים $(0,0)$, $(0,-2)$ ו- $(2,0)$.

9) מצאו במישור $2x+y+3z=6$ את הנקודה הקרובה ביותר למשטח $x^2-2x+y^2-2y+z^2-6z+10=0$.

10) הראו כי הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $f(x,y,z)=\ln(yz-x)$ בנקודה $A(1,2,1)$ מקיימת את האי-שוויון $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(A)\leq\sqrt{6}$ לכל וקטור יחידה $\bar{v}$.

11) הוכיחו שהפונקציה $z(x,y)=xy+xf\left(\frac{x}{y}\right)$ מקיימת את המשוואה $xz'_x+yz'_y=xy+z$ כאשר $f(t)$ פונקציה גזירה לכל t.

12) הראו כי המשוואה $(\sin x)\ln y+\frac{\cos x}{z}+\frac{z^3}{y^2}=0$ מגדירה בסביבת הנקודה $(\pi,1,1)$ פונקציה סתומה $z=z(x,y)$ ומצאו את הנגזרת הכיוונית של $z(x,y)$ בנקודה $(\pi,1)$ בכיוון מהנקודה $(\pi,1)$ לראשית $(0,0)$.