חדו"א 2 להנדסת מכונות

דף עבודה 5

פתרון

שאלה 1

$$\vec{r}(t)=\left(e^{2t}\cos(2t),\ 2,\ e^{2t}\sin(2t)\right)$$

arc length parameter $s(t)=\int_0^t |\vec{r}'(\tau)|\,d\tau$

$$\vec{r}'(t)=\left(2e^{2t}\cos(2t)-2e^{2t}\sin(2t),\ 0,\ 2e^{2t}\sin 2t+2e^{2t}\cos 2t\right)$$

$$|\vec{r}'(t)|=\sqrt{4e^{4t}\cos^2 2t+4e^{4t}\sin^2 2t-8e^{4t}\sin 2t\cdot\cos 2t+4e^{4t}\sin^2 2t+4e^{4t}\cos^2 2t+8e^{4t}\sin 2t\cdot\cos 2t}=\sqrt{8e^{4t}}=2\sqrt{2}\,e^{2t}$$

$$s(t)=\int_0^t 2\sqrt{2}\,e^{2\tau}d\tau=\sqrt{2}\,e^{2\tau}\Big|_0^t=$$

$$=\sqrt{2}\left(e^{2t}-1\right)$$

$$\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=e^{2t}$$

$$2t=\ln\left(\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$t=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{r}(s) = \left(e^{\ln\left(\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)} \cdot \cos\left(\ln \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right),\ 2,\ e^{\ln\left(\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)} \cdot \sin\left(\ln \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

$$\vec{r}(s) = \left(\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \cos\left(\ln \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right),\ 2,\ \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\ln \frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

$$Length = s(2) = \sqrt{2} \cdot (e^4 - 1)$$

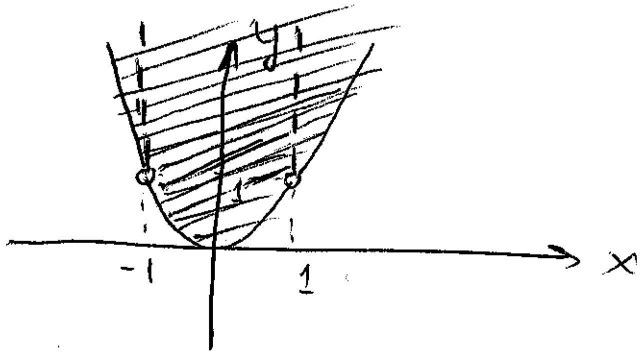
שאלה 2

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$$

$$\begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ 1 - x^2 \neq 0 \end{cases}$$

תחום הגדרה:

$$\begin{cases} y \geq x^2 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$$



שאלה 3

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{y}} = \frac{y}{y-x}$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| < 1$$

$$x \neq 0$$

$$y \neq 0$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{y-x}, & x \neq 0,\ |x| < |y|,\ y \neq 0 \\ 0, & x = 0,\ y \neq 0 \end{cases}$$

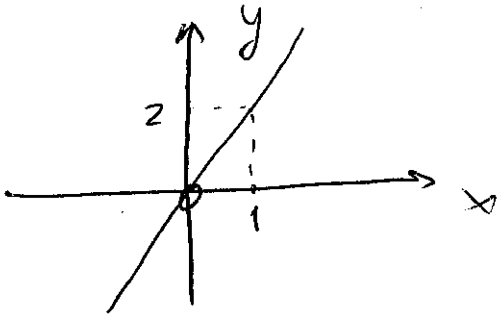
$$f(1,2) = \frac{2}{2-1} = 2$$

קו רמה (קו גובה) העובר דרך נק' (1,2) עבור פונק' $f(x,y)$:

$$\frac{y}{y-x} = 2$$

$$y = 2(y-x)$$

$$y = 2x$$



<u>שאלה 4</u>

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

תחום הגדרה: $\mathbb{R}^2$ (פונק' מוגדרת בכל מישור xy)

$$\text{Image } f(x,y) = \mathbb{R}$$

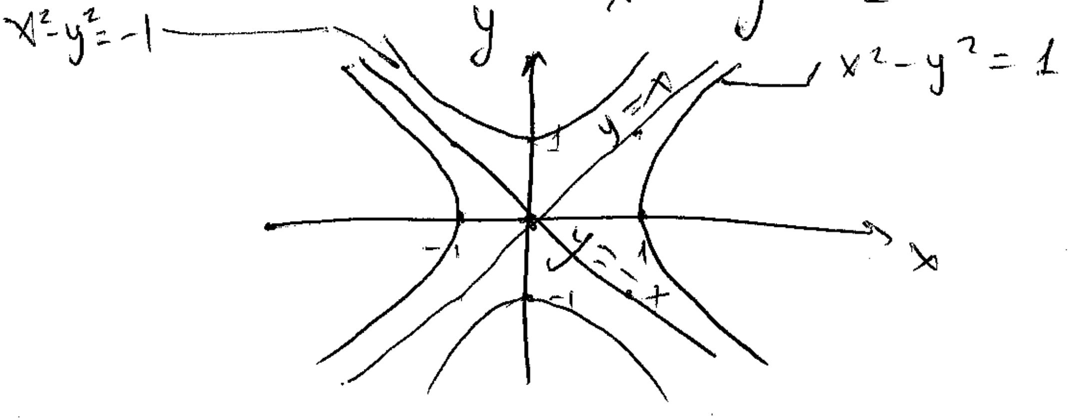
$$f(x,y) = c$$

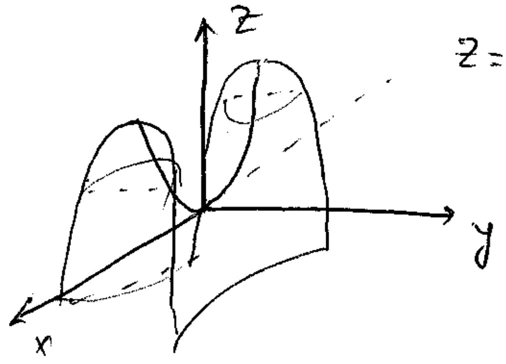
$C=-1$: $x^2 - y^2 = -1$ ← היפרבולה

$c=0$: $x^2 - y^2 = 0$

$y = \pm x$ ← זוג ישרים נחתכים

$C=1$: $x^2 - y^2 = 1$ היפרבולה





$z=x^2-y^2$

פרבולויד הפרבולי
(אוכף)

<u>שאלה 5</u>

א.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\cdot \sin^2 x}{x^4+y^4}$$

נבחר מסלול $x=0$:

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{y^2\cdot \sin^2 0}{0^4+y^4} = 0$$

נבחר מסלול $y=x$:

$$\lim_{\substack{y=x\\ x\to 0}} \frac{x^2\cdot \sin^2 x}{2x^4} = \lim_{\substack{y=x\\ x\to 0}} \frac{\sin^2 x}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

לפי שני מסלולים שונים מקבלים תוצאות שונות,
מסקנה: <u>הגבול אינו קיים</u>

ב.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\cdot \sin^2 y}{x^2+3y^2}$$

$$0 \le \frac{x^2\cdot \sin^2 y}{x^2+3y^2} \le \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2} = \sin^2 y \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

$x^2+3y^2 \ge x^2$

לפי משפט סנדוויץ':

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2+3y^2} = 0$$

.ד

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$$

נבחר מסלול $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x=0\\ z=0\\ y\to 0}} \frac{0\cdot y+y\cdot 0+0\cdot 0^2}{0^2+y^2+0^4} = 0$$

נבחר מסלול: $\begin{cases} y=x \\ z=x \end{cases}$

$$\lim_{\substack{y=x\\ z=x\\ x\to 0}} \frac{x^2+x^3+x^3}{x^2+x^2+x^4} = \lim_{\substack{y=x\\ z=x\\ x\to 0}} \frac{x^2\cdot(1+2x)}{x^2\cdot(2+x^2)} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

לפי שני מסלולים שונים קיבלנו תוצאה שונה, לכן הגבול אינו קיים

.ה

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} t=x^2+y^2 \\ t\to 0 \\ (x,y)\to(0,0) \end{matrix} \right\} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-t}-1}{t} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{t\to 0}\left(-e^{-t}\right) = -1$$

לופיטל
([illegible])

שאלה 6

$$f(x,y,z)=\sqrt{1+xz}-\sqrt{1-xy}$$

$$f'_x(x,y,z)=\frac{z}{2\sqrt{1+xz}}+\frac{y}{2\sqrt{1-xy}}$$

$$f''_{xy}(x,y,z)=\left(f'_x\right)'_y=\left(\frac{z}{2\sqrt{1+xz}}+\frac{y}{2\sqrt{1-xy}}\right)'_y$$

$$=\left(+\frac{y}{2\sqrt{1-xy}}\right)'_y=+\left[\frac{2\sqrt{1-xy}-\frac{y\cdot 2\cdot(-x)}{2\sqrt{1-xy}}}{4(1-xy)}\right]=$$

$$=+\frac{2(1-xy)+xy}{4(1-xy)^{3/2}}=\frac{-xy+2}{4\cdot(1-xy)^{3/2}}$$

$$f'''_{xyz}=\left(f''_{xy}\right)'_z=0$$

שאלה 7

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f'_x=\frac{2y\cdot(x^2+y^2)-2xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}= \quad : (x,y)\neq(0,0)$$

$$=\frac{-2x^2y+2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \frac{2y \cdot (y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y \cdot (y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2x \cdot (x^2+y^2) - 2xy \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$= \frac{2x^3 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{2 \cdot 0 \cdot \Delta y}{\Delta y^2} - 0}{\Delta y} = 0$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \frac{2x \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

נראה ש $f'_x(x,y)$ לא רציפה בנק' $(0,0)$.

נבחר מסלול $x=0$:

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to0}} f'_x(0,y)=\lim_{\substack{x=0\\y\to0}}\frac{2y^3}{y^4}=2\lim_{y\to0}\frac{1}{y}=$$

$$=\infty\neq0$$

מסקנה: $f'_x(x,y)$ לא רציפה בנק' $(0,0)$

$f'_y(x,y)$ גם לא רציפה בנק' $(0,0)$:

נבחר מסלול: $y=0$

$$\lim_{\substack{y=0\\x\to0}} f'_y(x,0)=\lim_{x\to0}\frac{2x^3}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x}=$$

$$=\infty\neq0$$

לכן $f'_y(x,y)$ לא רציפה בנק' $(0,0)$

דיפרנציאביליות של $f(x,y)$: נשים לב שפונק' $f(x,y)$ לא רציפה בנק' $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{y=x\\x\to0}}\frac{2x^2}{2x^2}=1\neq0$$

נבחר מסלול $y=x$

לכן פונק' $f(x,y)$ לא רציפה בנק' $(0,0)$.
לכן היא <u>לא דיפרנציאבילית בנק' $(0,0)$</u>

8 ndke

$$f(x,y)=\begin{cases} x\cdot y\cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$: (x,y)\neq(0,0)$

$$f'_x(x,y)=y\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\cdot\left(\frac{2x\cdot(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right)=$$

$$=y\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\cdot\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}=y\cdot\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=y\cdot\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y)=x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\cdot\frac{(-4y\cdot x^2)}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=x\cdot\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot 0\cdot\frac{\Delta x^2-0^2}{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0\cdot\Delta y\cdot\frac{0^2-\Delta y^2}{0^2+\Delta y^2}-0}{\Delta y}=0$$

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} y \cdot \dfrac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} x \cdot \dfrac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f'_x(x,y)$ רציפה לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = ?$$

$$0 \le \left| \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \right| \le \frac{x^4|y|}{(x^2+y^2)^2} + \frac{|y|^5}{(x^2+y^2)^2} +$$

$$+ \frac{4x^2|y|^3}{(x^2+y^2)^2} \le \frac{x^4 \cdot |y|}{x^4} + \frac{|y|^5}{y^4} + \frac{4x^2|y|^3}{2x^2 \cdot y^2} =$$

$$= |y| + |y| + 2|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

לכן לפי סנדוויץ':

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = 0 = f'_x(0,0)$$

מסקנה: $f'_x(x,y)$ פונק' רציפה בנק' $(0,0)$

$f'_x(x,y)$ פונק' רציפה בכל נק' $(x,y)\neq(0,0)$

כפונק' אלמנטרית.

$f'_y(x,y)$ מוגדרת לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

נבדוק רציפות:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=?$$

$$0\le\frac{|x^5-xy^4-4x^3y^2|}{(x^2+y^2)^2}\le\frac{|x|^5}{(x^2+y^2)^2}+$$

$$+\frac{|x|\,y^4}{(x^2+y^2)^2}+\frac{4|x|^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\le\frac{|x|^5}{x^4}+\frac{|x|\cdot y^4}{y^4}+$$

$$+\frac{4|x|^3\cdot y^2}{2x^2\cdot y^2}=|x|+|x|+2|x|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}=0=f'_y(0,0)$$

לכן $f'_y(x,y)$ פונק' רציפה בנק' $(0,0)$.

$f'_y(x,y)$ פונק' רציפה בכל נק' $(x,y)\neq(0,0)$

כפונק' אלמנטרית.

$$f''_{xy}(0,0) = \left(f'_x(x,y)\right)'_y \Big|_{(x,y)=(0,0)} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{\Delta y\,(0^4 - \Delta y^4 + 4 0^2 \Delta y^2)}{(0^2 + \Delta y^2)^2} - 0}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} -\frac{\Delta y^5}{\Delta y^5} = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \left(f'_y(x,y)\right)'_x \Big|_{(x,y)=(0,0)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(\Delta x; 0) - f'_y(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x \cdot (\Delta x^4 - 0^4 - 4 \Delta x^2 \cdot 0^2)}{(\Delta x^2 + 0^2)^2} - 0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^5}{\Delta x^5} = 1$$

$$f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$$