חדו"א 2 להנדסת מכונות, סמ' ב 2016

פתרון דף תרגילים 8

1 א)

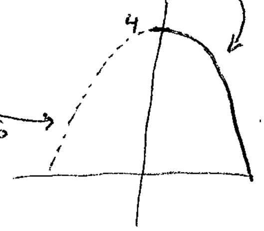
$$I = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{16-4y}} f(x,y)\,dx$$

גבולות האינטגרציה ב - x:

גבול עליון: $x=\sqrt{16-4y}$ חצי ימני בלבד

$x^2 = 16-4y$

$y=-\frac{1}{4}x^2+4$ כל הפרבולה



גבול תחתון

$\left\{ x=\sqrt{4y-y^2} \right.$ החצי הימני

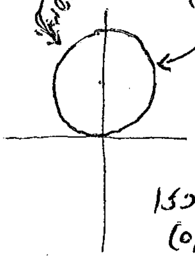
$x^2 = 4y-y^2$

$x^2+y^2-4y=0$

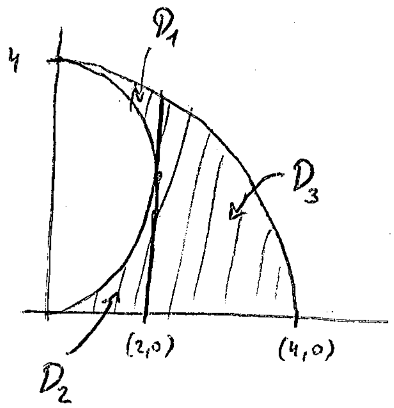
$x^2+(y-2)^2=4$

זה מעגל ברדיוס 2 שמרכזו $(0,2)$

$x=-\sqrt{4y-y^2}$ החצי השמאלי



אם כן, תחום האינטגרציה הוא:



כדי לשנות את סדר האינטגרציה, נחלק לתתי תחומים D_1, D_2, D_3 כמו בציור.

בתחום D_1: $0\le x\le 2$, ואת גבולות האינטגר' ב-y, יש לבטא כפונק' של x.

הגבול התחתון ב-y הוא (החצי העליון של) המעגל, כלומר $y=\sqrt{4-x^2}+2$.

הגבול העליון הוא $y=-\frac{1}{4}x^2+4$.

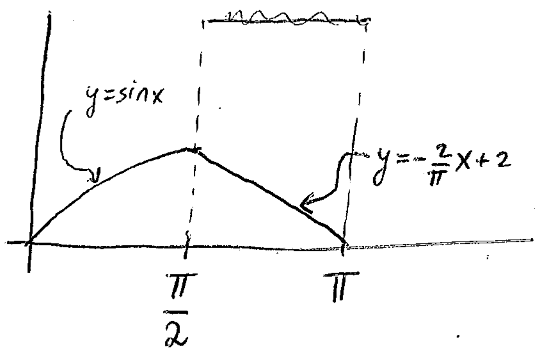
בתחום D_2: $0\le x\le 2$, $0\le y\le -\sqrt{4-x^2}+2$.

בתחום D_3: $2\le x\le 4$, $0\le y\le -\frac{1}{4}x^2+4$.

$$\boxed{I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{4-x^2}+2}^{-\frac{1}{4}x^2+4} f(x,y)\,dx + \int_0^2 dx \int_0^{-\sqrt{4-x^2}+2} f(x,y)\,dy + \int_2^4 dx \int_0^{-\frac{1}{4}x^2+4} f(x,y)\,dy.}$$

1 ב)

נצייר את תחום האינטגרציה:



$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$

$0 \le y \le \sin x$ $\qquad$ $0 \le y \le 2-\frac{2}{\pi}x$

את התחום ניתן לכתוב גם כך:

$$0 \le y \le 1$$

$$\arcsin(y) \le x \le -\frac{\pi}{2}y+\pi$$

ולכן:

$$I = \int_{y=0}^{1} \int_{x=\arcsin y}^{-\frac{\pi}{2}y+\pi} f(x,y)\,dx\,dy$$

ג) הגבול העליון ב-y הוא

$$y = 3+\sqrt{-x^2+12x-35}$$

$$y-3 = \sqrt{}$$

$$(y-3)^2 = -x^2+12x-35$$

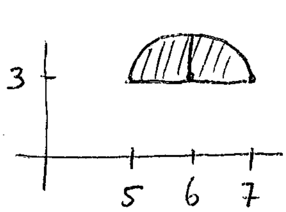
$$x^2-12x+(y-3)^2 = -35$$

$$(x-6)^2+(y-3)^2 = 1 \longrightarrow$$

זוהי משוואת מעגל

מרכז: $(6,1)$, רדיוס: 1.

לכן המשוואה הראשונה היא החצי העליון ממעגל זה.



תחום האינטגרציה הוא:

$$5 \le x \le 7$$

$$3 \le y \le 3+\sqrt{-x^2+12x-35}$$

וכדי לכתוב אותו ב"סדר ההפוך", יש לבטא את המעגל

כ: x כפונקציה של y:

$$(x-6)^2 = \underbrace{1-(y-3)^2}_{-y^2+6y-8}$$

$$|x-6| = \sqrt{-y^2+6y-8}$$

עבור $x\ge 6$, (חצי המעגל הימני)

$$x-6=\sqrt{-y^2+6y-8}$$

$$x=6+\sqrt{-y^2+6y-8}$$

ועבור $x\le 6$, (חצי המעגל השמאלי)

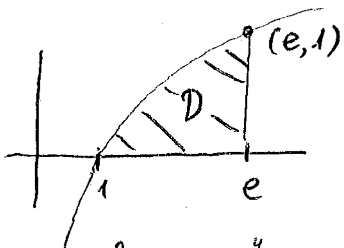
$$x-6=-\sqrt{}$$

$$x=6-\sqrt{}$$

לכן, התחום המבוקש הוא

$$3\le y\le 4$$
$$6-\sqrt{-y^2+6y-8}\le x\le 6+\sqrt{-y^2+6y-8}$$

$$I=\int_3^4 dy\int_{6-\sqrt{}}^{6+\sqrt{}} f(x,y)\,dx$$



$y=\ln x \Leftrightarrow e^y=x$

2. א) תחום האינטגרל

$$1\le x\le e$$
$$0\le y\le \ln x$$

בסדר הפוך:

$$0\le y\le 1$$
$$e^y\le x\le e$$

$$I=\int_{y=0}^{1}\int_{x=e^y}^{e}\frac{1}{e^y+1}\,dx\,dy=\int_{y=0}^{1}\frac{x}{e^y+1}\Big|_{x=e^y}^{e}dy=$$

$$=\int_{y=0}^{1}\frac{e-e^y}{e^y+1}dy=e\underbrace{\int_0^1\frac{dy}{e^y+1}}_{\mathrm{II}}-\underbrace{\int_0^1\frac{e^y\,dy}{e^y+1}}_{\mathrm{III}}=\ldots=\boxed{\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)+e\left(1+\ln\frac{2}{e+1}\right)}$$

$$\mathrm{II}=\int_0^1\frac{1+e^y-e^y}{1+e^y}dy=\underbrace{\int_0^1 1\,dy}_{=1}-\underbrace{\int_0^1\frac{e^y\,dy}{1+e^y}}_{\mathrm{III}}=\cancel{1-\ln(e^y+1)\Big|_0^1}$$

$$\mathrm{III}=\begin{bmatrix}t=e^y+1\\ dt=e^y dy\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln(e^y+1)\Big|_0^1=\ln(e+1)-\ln(2)$$
$$=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

2 ב)

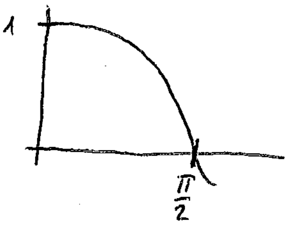
$$I=\int_0^1 dy\int_0^{\arccos y}\frac{dx}{\sin x+10}$$

נמצא את תחום האינטגרציה: $0\le y\le 1$.

$0\le x\le \arccos(y)$.

עבור y בתחום זה, $\cos x = y \iff x=\arccos(y)$

(~~...~~ קיבלנו $0\le x\le\pi$)



נכתוב את התחום הזה ב"סדר ההפוך":

$0\le x\le \frac{\pi}{2}$

$0\le y\le \cos x$

$$I=\int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\cos x}\frac{dy}{\sin x+10}=\int_{x=0}^{\pi/2}\frac{1}{\sin x+10}\cdot y\Big|_0^{\cos x}dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x+10}dx=\ln|\sin x+10|\Big|_0^{\pi/2}=\ln(11)-\ln(10)$$

$$=\ln\left(\frac{11}{10}\right).$$

3 א)

$\iint_D xy^2\,dx\,dy$, D תחום ע״י $y^2=4x$, $x=1$.

נשים לב ש:

(i) התחום סימטרי ביחס לציר x.

כלומר אם $(x,y)\in D$,

אז $(x,-y)\in D$.

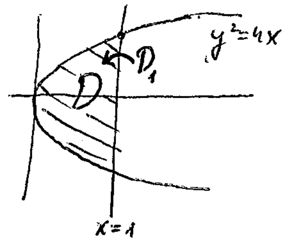
(ii) הפונק' סימטרית ביחס לציר x.

כלומר $f(x,y)=f(x,-y)$

לכן, אפשר לחשב את האינטגרל בתחום D_1,

תת התחום של D, שנמצא מעל ציר ה-x;

ואז לכפול ב-2.



תחום האינטגרציה:

D_1: $0\le y\le 2$

$\frac{y^2}{4}\le x\le 1$

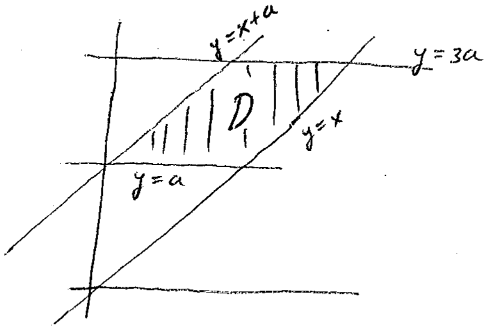
$$\iint_D f\,dxdy=2\iint_{D_1}f\,dxdy=2\int_{y=0}^{2}\int_{x=\frac{y^2}{4}}^{1}xy^2dx\,dy=$$

$$=2\int_{y=0}^{2}\frac{y^2}{2}x^2\Big|_{x=\frac{y^2}{4}}^{1}dy=\int_0^2 y^2\left(1-\frac{y^4}{16}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{7\cdot 16}y^7\Big|_0^2=\frac{8}{3}-\frac{8}{7}=\frac{32}{21}$$

3 ב.)

$$I=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy\ ,\qquad (a>0)\ ,\ \begin{matrix} y=a & y=x \\ y=3a\ , & y=x+a\end{matrix}$$: D מקבילית שצלעותיה



$$I=\int_{y=a}^{3a}\int_{x=y-a}^{y}(x^2+y^2)\,dx\ dy=$$

$$=\int_{y=a}^{3a}\frac{1}{3}x^3+y^2x\Big|_{x=y-a}^{y}\ dy=$$

$$=\int_a^{3a}\frac{1}{3}y^3+y^3-\frac{1}{3}(y-a)^3-y^2(y-a)\ dy=$$

$$=\int_a^{3a}\left(2ay^2-a^2y+\frac{a^3}{3}\right)dy=\frac{2a}{3}y^3-\frac{a^2}{2}y^2+\frac{a^3}{3}y\Big|_a^{3a}=$$

$$=\frac{2a}{3}(3a)^3-\frac{a^2}{2}(3a)^2+\frac{a^3}{3}(3a)-\frac{2a}{3}a^3+\frac{a^2}{2}a^2-\frac{a^3}{3}a=14a^4$$

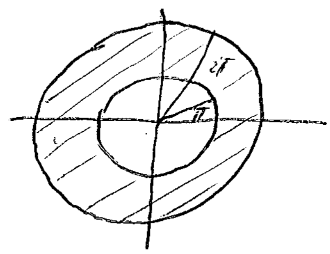
4 א.)

$$I=\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\ dx\,dy\ ,\qquad D=\{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$$

תחום האינטגרציה הוא הטבעת,

עם מעגל פנימי ברדיוס π $(x^2+y^2=\pi^2)$

ומעגל חיצוני ברדיוס 2π $(x^2+y^2=(2\pi)^2)$



בקואורד' פולריות: $\begin{matrix}0\le\theta\le 2\pi\\ \pi\le r\le 2\pi\end{matrix}$ ולכן

$$I=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=\pi}^{2\pi}\underset{\text{הפונק'}}{\sin(r)}\cdot\underset{\text{היעקוביאן}}{r}\ dr\,d\theta=\underbrace{\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\right)}_{=2\pi}\cdot\underbrace{\left(\int_{r=\pi}^{2\pi}\sin(r)\,r\,dr\right)}_{II}=-6\pi^2$$

(אינטגרציה בחלקים)

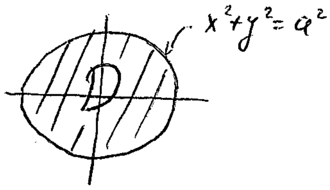
$$II=\begin{bmatrix}u=r & v=-\cos(r)\\ u'=1 & v'=\sin(r)\end{bmatrix}=-r\cos(r)\Big|_\pi^{2\pi}-\int_\pi^{2\pi}-\cos(r)\,dr=-r\cos(r)\Big|_\pi^{2\pi}+\sin(r)\Big|_\pi^{2\pi}$$

$$=-2\pi\underset{1}{\cos(2\pi)}+\pi\underset{-1}{\cos(\pi)}+\underset{0}{\sin(2\pi)}-\underset{0}{\sin(\pi)}=-3\pi.$$

4 ב.

$$I = \iint_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

תחום האינטגרל :



הפונק' : $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2} = r$

היעקוביאן : r

גבולות האינטגרציה : $0 \le \theta \le 2\pi$

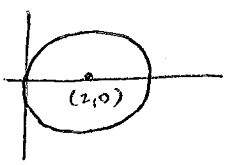
$0 \le r \le a$

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a} \underbrace{r}_{\text{הפונק'}} \cdot \underbrace{r}_{\text{היעקוביאן}}\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^a d\theta = \frac{a^3}{3} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \frac{2}{3}\pi a^3$$

4 ג.

$I = \iint (x^2+y^2)\, dx\, dy$. $\quad D = \{x^2+y^2 \le 4x\}$.



גבולות האינטגרציה : $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

נציב את משוואת המעגל בקואור' קוטביות :

$$x^2+y^2 = 4x$$
$$r^2 = 4r\cos\theta$$
$$\cancel{r=0} \qquad \boxed{r = 4\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le r \le 4\cos\theta$$

$$I = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \int_{r=0}^{4\cos\theta} r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{4\cos\theta} d\theta = 4^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= 64 \int \cos^2\theta \cdot (1-\sin^2\theta)\, d\theta = 64 \Big[\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta}_{II} - \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta\, d\theta}_{III} \Big]$$

$$II = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(ממשיך בדף הבא)

4 ד.

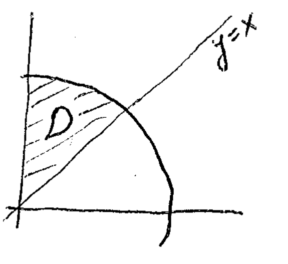
$I = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$, $\quad D = \{x \ge 0, y \ge 0, y \ge x, x^2+y^2 \le 1\}$

גבולות האינטגרציה :

$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$0 \le r \le 1$

תחום האינטגרציה :



4 ג) (המשך)

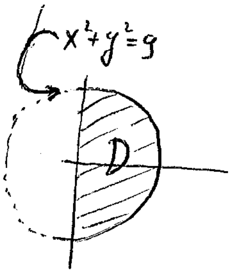
$$I=\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\int_{r=0}^{1}\sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta=\underbrace{\left(\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}d\theta\right)}_{=\frac{\pi}{4}}\underbrace{\left(\int_{r=0}^{1}\sqrt{1-r^2}\,r\,dr\right)}_{\mathrm{II}}$$

הפונק   היעקוביאן

$$\mathrm{II}=\begin{bmatrix}t=1-r^2\\ dt=-2r\,dr\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\int_{t=1}^{0}\sqrt{t}\,dt=-\frac{1}{2}\,\frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_1^0=\frac{1}{3}$$

4 ה)

$$D=\{x\geq 0,\ x^2+y^2\leq 9\},\qquad I=\iint_D(x+y)\,dx\,dy$$



תחום האינטגרציה:

גבולות האינטגרל:

$$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

$$0\leq r\leq 3$$

הפונק: $x+y=r\cos\theta+r\sin\theta$

היעקוביאן: r

$$I=\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{3}r(\cos\theta+\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

הפונק   היעקוביאן

$$=\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta\cdot\int_{r=0}^{3}r^2\,dr=\left(\sin\theta-\cos\theta\Big|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}r^3\Big|_0^3\right)$$

$$=\big(1-0-(-1-0)\big)\cdot 9=18$$

(המשך 4 ב)

$$\mathrm{III}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}(\sin\theta\cdot\cos\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{4}\int(\sin 2\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}$$

$$I=64(\mathrm{II}-\mathrm{III})=64\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=24\pi$$

5 א)

$\iint_D x^2y^2\,dx\,dy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\le y\le 2x$ ו- $\frac{1}{x}\le y\le \frac{2}{x}\}$,

נעבור למערכת קואורדינטות חדשה :

$u = xy$

$v = \frac{y}{x}$

(בחרנו כך כי $x\le y\le 2x \iff 1\le \frac{y}{x}\le 2 \iff 1\le v\le 2$

$\frac{1}{x}\le y\le\frac{2}{x} \iff 1\le xy\le 2 \iff 1\le u\le 2$)

כדי לחשב את היעקוביאן $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$,

נחשב את $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, ואז נקח את ההופכי (1 חלקי) :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{pmatrix} \xrightarrow{\det} \frac{y}{x}+\frac{y}{x} = \frac{2y}{x}$$

ולכן

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v}$$

סה"כ

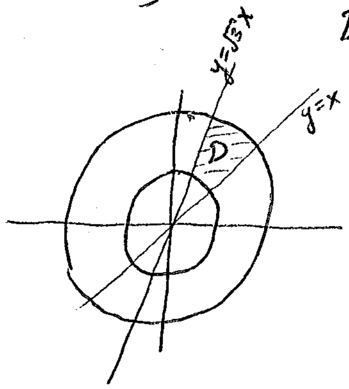
$f(x,y) = (xy)^2 = u^2$,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{u=1}^{2}\int_{\underset{\text{הפונ'}}{v=1}}^{2} u^2 \underset{\text{היעקוביאן}}{\frac{1}{2v}}\,dv\,du = \int_{u=1}^{2}\frac{u^2}{2}\ln v\Big|_{v=1}^{2}\,du$$

$$= \frac{\ln(2)}{2}\int_1^2 u^2\,du = \frac{\ln 2}{2}\,\frac{u^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{\ln 2}{6}(8-1) = \frac{7}{6}\ln(2) .$$

5 ק)

$$\mathcal{D}=\{1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le \sqrt{3}x\}\ ,\quad I=\iint_{\mathcal{D}} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx\,dy$$



תחום האינטגרציה :

נבחר מערכת
קואורדינטות פולריות.

גבולות האינטגרציה :

הישר $y=x$ מתאים לזוית $\theta=\frac{\pi}{4}$,

והישר $y=\sqrt{3}x$ — " — θ שעבורה $\tan\theta=\sqrt{3}$ כלומר $\theta=\frac{\pi}{3}$.

לכן $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$

$1\le r\le 2$.

הפונק :

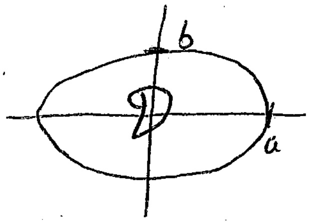
$$\arctan\frac{y}{x}=\arctan\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\arctan(\tan\theta)=\theta$$

(נכון עבור $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$)

לכן

$$I=\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\pi/3}\int_{r=1}^{2}\underbrace{\theta}_{\text{הפונק}}\cdot\underbrace{r}_{\text{היעקוביאן}}\,dr\,d\theta=\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3}\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_{r=1}^{2}r\,dr\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\theta^2\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3}\cdot\frac{1}{2}r^2\Big|_1^2=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{16}\right)\cdot(4-1)=\frac{7\pi^2}{129}$$



6 א) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. חשב שטח תחום.

נשתמש במערכת קואורד. "אליפטית" ;

$x = a r\cos\theta$

$, y = b r \sin\theta$

הצבה במשוואת האליפסה תתן $r=1$.

כלומר גבולות האינטגרציה הם $0\le\theta\le 2\pi$

$0\le r\le 1$

היעקוביאן:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\det(J)=abr(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=abr$$

שטח התחום D הוא $S=\iint_D 1\,dA$, לכן

$$S=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\underbrace{1}_{\text{הפונק}}\cdot\underbrace{abr}_{\text{היעקוביאן}}\,dr\,d\theta=ab\int_{\theta=0}^{2\pi}\tfrac{1}{2}r^2\Big|_0^1\,d\theta=$$

$$=\frac{ab}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\theta}_{=2\pi}=\pi ab.$$

6 ב) במערכת קואורד' מתאימה, התרגיל הופך להיות קל:

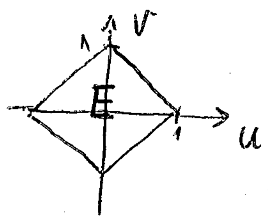
נגדיר מערכת קואורד' ;

$u=2x-y$

$. v=2y-x$

במערכת זו, השוויון הוא $|u|+|v|=1$

כלומר התחום הוא:



כדי לחשב את היעקוביאן, כלומר את $\left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right|$,

6ב) נתחיל בלחשב את
(המשך)

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = 3 \quad \Longrightarrow \quad \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$S = \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_E \frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{1}{3}\iint_E 1\,du\,dv$$

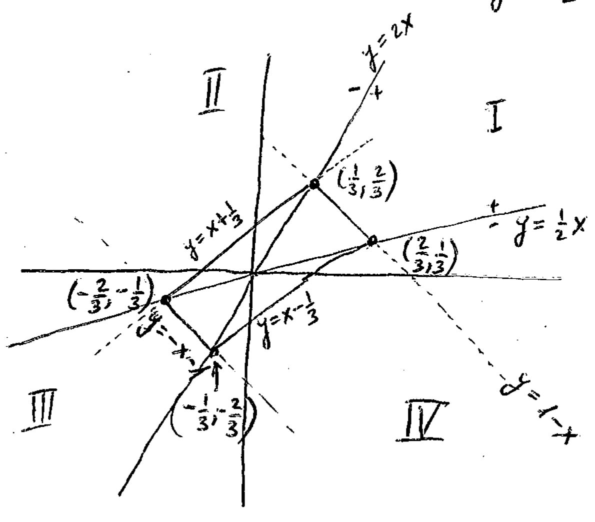
D: (התחום במישור xy)
E: (התחום במישור uv)
$\frac{1}{3}$: יעקוביאן

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\text{השטח } E\right) = \frac{2}{3}$$

<u>דרך נוספת לפתרון:</u> נצייר את $|2x-y|+|2y-x|=1$.

נחלק למקרים: $2x-y\geq 0 \iff 2x\geq y$

$2y-x\geq 0 \iff y\geq \frac{1}{2}x$



<u>בתחום I</u> (ברביע הראשון, בין שני הישרים)

$2x-y+2y-x=1$

$y+x=1$

$y=1-x$

<u>בתחום IV</u>:

$2x-y-(2y-x)=1$

$3x-3y=1$

$y=x-\frac{1}{3}$

<u>בתחום III</u>:

$-(2x-y)-(2y-x)=1$

$-x-y=1$

$-x-1=y$

<u>בתחום II</u>:

$-(2x-y)+(2y-x)=1$

$-3x+3y=1$

$y=x+\frac{1}{3}$

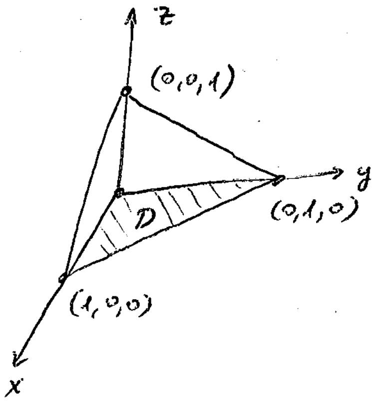
קיבלנו מלבן. נחשב את שטח המלבן.

אורך המלבן: $\sqrt{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2+\left(\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2}$

רוחב המלבן: $\frac{\sqrt{2}}{3}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^2}$

לכן שטחו הוא $\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{2}{3}$.

7 א)



אנו יודעים את נפח הפירמידה לפי גיאומטריה תיכונית.

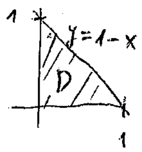
$$V = \frac{1}{3}\,(\text{בסיס})\cdot(\text{גובה}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1 = \frac{1}{6}$$

נחשב כעת ע"י אינטגרל כפול:

המישור הנטוי שבציור הוא גרף הפונק' $z = 1-x-y$.

נסמן ב-D את ~~התחום~~ המשולש במישור xy, שקודקודיו $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$.

כעת $V = \iint_D (1-x-y)\,dx\,dy$.



כדי לפרק את האינטגרל הכפול לאינטגרל חוזר, נשים לב שעבור D,

$0 \le x \le 1$

$0 \le y \le 1-x$.

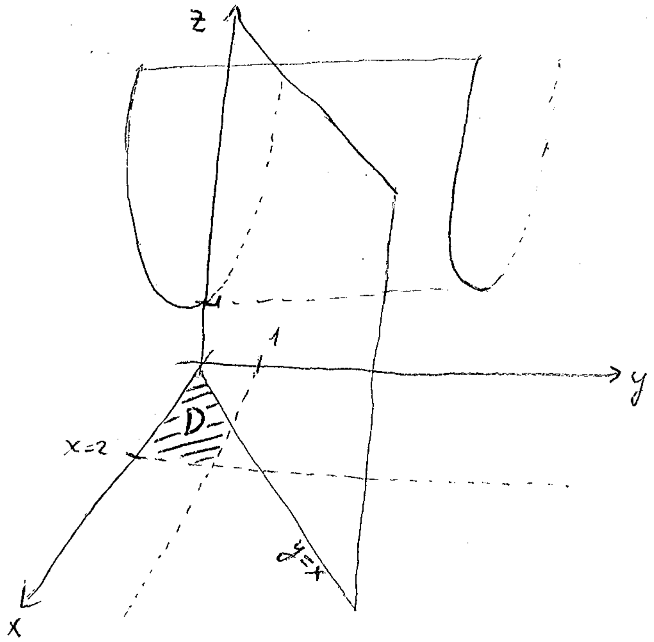
$$V = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}(1-x-y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1} (1-x)y - \frac{1}{2}y^2 \Big|_{y=0}^{1-x} dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} (1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}(1-x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1-x)^3}{3(-1)}\Big|_{x=0}^{1} = -\frac{1}{6}(0-1) = \frac{1}{6}.$$

7 ב)

$V: \quad z=0, \; x=2, \; y=1, \; y=x, \; z=x^2+1.$



הגוף המבוקש, V, הינו

על מישור xy הוא התחום D;

$0 \le y \le 1$

$y \le x \le 2$.

ה"תקרה" שלו היא הצילינדר

הפרבולי $z = x^2+1$.

$$\iint_D (x^2+1)\,dA = \int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{2} (x^2+1)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1} \frac{1}{3}x^3+x\Big|_{x=y}^{2}\,dy$$

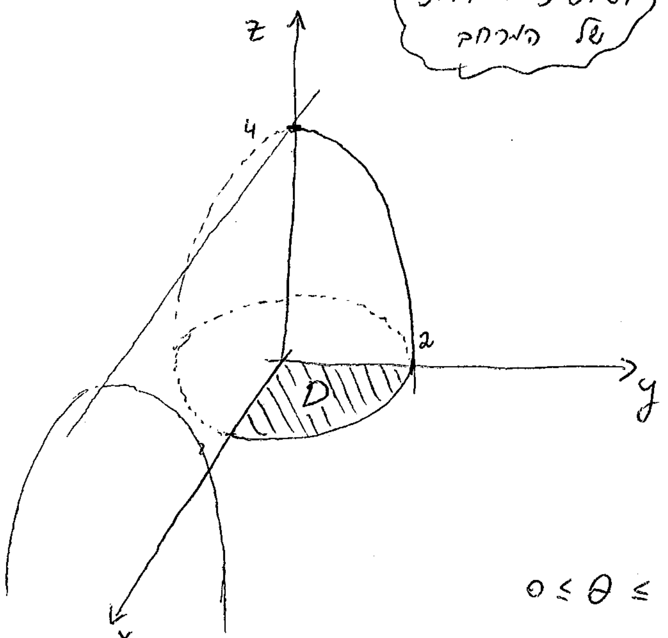
$$= \int_{y=0}^{1}\left(\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}y^3-y\right)\cdot dy = \frac{13}{3}y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{12}y^4\Big|_0^1 = \frac{15}{4} = 3.75$$

<u>הערה:</u> כל המשוואות המופיעות בשאלה מייצגות <u>משטחים</u> במרחב.

כך, למשל, $z=0$ הנו מישור xy.

7 ג)

$$V: \underbrace{x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0}_{\text{"בשמינית החיובית" של המרחב}},\quad \underbrace{z\le 4-y^2}_{\text{מתחת לצילינדר הפרבולי } z=4-y^2},\quad \underbrace{x^2+y^2\le 4}_{\text{בתוך הגליל } x^2+y^2=4}.$$



ההיטל של הגוף V על מישור xy מסומן ב- D, זהו רבע עיגול.

הנפח:

$$\iint_D (4-y^2)\,dx\,dy = \dots$$

בקואורד' פולריות, התחום D: $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $0\le r\le 2$.

הפונק': $4-y^2 = 4-r^2\sin^2\theta$

$$\dots = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2} \underbrace{(4-r^2\sin^2\theta)}_{\text{הפונק'}}\cdot \underbrace{r}_{\text{היעקוביאן}}\,dr\,d\theta = \int_\theta\int_r 4r - r^3\sin^2\theta\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} 2r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\sin^2\theta\ \Big|_{r=0}^{2}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} 8-4\sin^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 8-4\,\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} 6+2\cos 2\theta\,d\theta =$$

$$= 6\theta + \sin 2\theta\ \Big|_0^{\pi/2} = 3\pi.$$