

חדו"א 2 להנדסת מכונות – גיליון תרגילים מספר 7

1. האם המשוואה $4x^3 - 3xy^2 + x^2y^3 = 0$ מגדירה פונקציה סתומה $y = \varphi(x)$ בסביבת הנקודה $(-1,1)$? נמק. מצא את $\varphi'(x)$ ו- $\varphi''(x)$.
2. הראה כי המשוואה $\sin(xy) + \cos(xyz) = \sin(xz) + \cos(yz)$ מגדירה פונקציה $z = f(x, y)$ בצורה הסתומה בסביבת הנקודה $P(1, \pi, 0)$ וחשב $f'_x(1, \pi)$ ו- $f'_y(1, \pi)$.
3. א. פונקציה $z(x, y)$ מוגדרת בתחום $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ על ידי השיווין
- $$z(x, y) = f\left(\frac{x-y}{x+y}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right) + x$$
- כאשר $f(t)$ ו- $g(s)$ פונקציות גזירות. חשב את ערך הביטוי $A = x \cdot z'_x + y \cdot z'_y - x$
- ב. פונקציות $f(t)$ ו- $g(s)$ מסעיף א' מקיימות את התנאים
- $$f(0) = g(1) = f'(0) = 2g'(1) = 1$$
- הראה כי במקרה הזה המשוואה $z = f\left(\frac{x-y}{x+y}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right) + x$ מגדירה בסביבת הנקודה $M(1,1,3)$ את הפונקציה הסתומה $y = y(x, z)$. מצא נגזרת כיוונית של הפונקציה זו בנקודה $x_0 = 1, z_0 = 3$ בכיוון מהנקודה לראשית הצירים במישור (x, z) . האם פונקציה עולה או יורדת בכיוון הזה?
4. נניח שהמשוואה $F(x, y, z) = 0$ מגדירה 3 פונקציות דפרנציאביליות $x(y, z), y(x, z)$, ו- $z(x, y)$. הוכיחו כי $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1$.
5. מצא את הנקודות הקיצון המקומיים וקבע את סוגיהן עבור הפונקציה
- $$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$
6. הוכח כי לפונקציה $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ יש אינסוף נקודות מקסימום (מקומי) ואינסוף נקודות אוכף, אך אין אף נקודת מינימום.
7. מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה $z(x, y)$ תחת האילוץ $g(x, y) = 0$:
- א. $z(x, y) = x^2 + y, g(x, y) = x^2 + y^2 - 8$.

ב. $g(x, y) = \frac{x}{9} + \frac{y}{3} - 1$, $z(x, y) = x^2 + y^2$

ג. $g(x, y) = e^x + e^y - 1$, $z(x, y) = x + y$

8. חשב את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $f(x, y)$ בתחום D :

א. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 6, -3 \leq y \leq 0, x + y \leq 3\}$, $f(x, y) = (x-4)^2 + 5(y+1)^2$

ב. $D = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

ג. $D = \{(x, y) \mid y \leq -x^2, y \geq -4\}$, $f(x, y) = x^2 - 2y - 2xy$

9. מצא על העקום $7x^2 + 8xy + y^2 = 45$ את הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים.

10. מצא את המרחק המינימלי בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ לבין הישר $\begin{cases} x + y = 6 \\ y - z = 10 \end{cases}$.

11. על קטע ישר המחבר הנקודות $A(4,0,0)$ ו- $B(0,6,4)$ מצא את הנקודה הקרובה ביותר

למשטח $x^2 + y^2 = 4$.

בהצלחה!