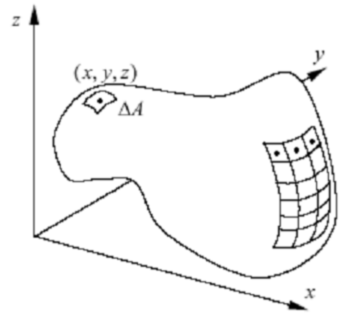
חדו"א 2 שבוע 12

1. אינטגרל משטחי מסוג 1

יהי σ - משטח(יריעה דו מימדית) בעלת צפיפות שטחית $f(x,y,z)$ - פונקציה סקלרית



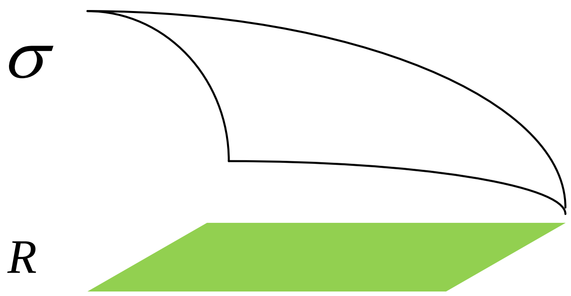
את מסת המשטח מחשבים באמצעות אינטגרל משטחי מסוג 1

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)ds = \lim_{\substack{\max \Delta A_k \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\cdot \Delta A_k$$

כאשר ΔA - שטח של אלמנט המשטח

חישוב האינטגרל

1. אם σ - משטח שמשוואתו היא פונקציה המפורשת $z=g(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות ותחום R הוא היטלו חד חד ערכי של המשטח σ על מישור xy



$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{R} \left(f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1} \right) dxdy$$

2. אם σ - משטח שמשוואתו היא פונקציה המפורשת $y=g(x,z)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות ותחום R הוא היטלו חד חד ערכי של המשטח σ על מישור xz

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{R} \left(f(x,g(x,z),z)\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 + 1} \right) dxdz$$

3. אם σ - משטח שמשוואתו היא פונקציה המפורשת $x=g(y,z)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות ותחום R הוא היטלו חד חד ערכי של המשטח σ על מישור yz

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{R} \left(f(g(y,z),y,z)\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 + 1} \right) dydz$$

תרגילים - חשב את האינטגרל

1. $\iint_\sigma z^2 ds$ כאשר $\sigma: \begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ 1\le z\le 2 \end{cases}$ תשובה $\frac{15\sqrt{2}\pi}{2}$

2. $\iint_\sigma xyzds$ כאשר $\sigma: \begin{cases} x+y=1 \\ x\ge 0, y\ge 0, 1\le z\le 2 \end{cases}$ תשובה $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. $\iint_\sigma x^2 yds$ כאשר $\sigma: \begin{cases} x^2+z^2=1 \\ 0\le y\le 1 \end{cases}$ תשובה $\frac{\pi}{4}$

4. $\iint_\sigma (x+y+z)ds$ כאשר $\sigma: \begin{cases} z=0 \\ 0\le x,y\le 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y=0 \\ 0\le x,z\le 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ 0\le y,z\le 1 \end{cases}$ תשובה 3

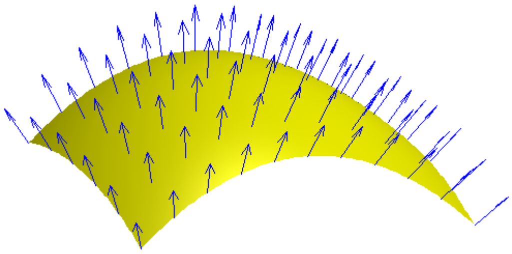
5. $\iint_\sigma \sqrt{x^2+y^2+z^2}ds$ כאשר $\sigma: \begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z\le 1 \end{cases}$ תשובה $\frac{4\pi}{3}$

6. $\iint_\sigma xyzds$ כאשר $\sigma: \begin{cases} 2x+3y+4z=12 \\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0 \end{cases}$

2. אינטגרל משטחי מסוג 2

יהי $\mathbf{n}(x,y,z)$ - וקטור היחידה הנורמאלי למשטח (יריעה דו מימדית) σ הנמצא בתוך שדה וקטורי

$$\mathbf{F}(x,y,z)=u(x,y,z)\hat{i}+v(x,y,z)\hat{j}+w(x,y,z)\hat{k}$$



את שטף השדה(מסה, מטען וכו' ליחידת זמן) מחשבים באמצעות אינטגרל משטחי מסוג 2

$$\iint_{\sigma}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)ds=\lim_{\substack{\max\Delta A_k\to0\\ n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}(x_k,y_k,z_k)\cdot\mathbf{n}(x_k,y_k,z_k)\Delta A_k$$

כאשר ΔA - שטח של אלמנט המשטח

חישוב האינטגרל

1. אם σ - משטח שמשוואתו היא פונקציה המפורשת $z=g(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות ותחום R הוא היטלו חד חד ערכי של המשטח σ על מישור xy אז שטף השדה

כלפי מעלה (בכיוון החיובי של ציר הZ)

$$\iint_{\sigma}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)ds=\iint_{R}\mathbf{F}(x,y,g(x,y))\cdot\left(-\frac{\partial g}{\partial x},-\frac{\partial g}{\partial y},1\right)dxdy$$

כלפי מטה (בכיוון השלילי של ציר הZ)

$$\iint_{\sigma}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)ds=\iint_{R}\mathbf{F}(x,y,g(x,y))\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},-1\right)dxdy$$

2. אם σ - משטח שמשוואתו היא פונקציה המפורשת $y=g(x,z)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות ותחום R הוא היטלו חד חד ערכי של המשטח σ על מישור xz אז שטף השדה

בכיוון החיובי של ציר הY

$$\iint_{\sigma}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)ds=\iint_{R}\mathbf{F}(x,g(x,z),z)\cdot\left(-\frac{\partial g}{\partial x},1,-\frac{\partial g}{\partial z}\right)dxdz$$

בכיוון השלילי של ציר הY

$$\iint_{\sigma}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)ds=\iint_{R}\mathbf{F}(x,g(x,z),z)\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x},-1,\frac{\partial g}{\partial z}\right)dxdz$$

3. אם σ - משטח שמשוואתו היא פונקציה המפורשת $x=g(y,z)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות ותחום R הוא היטלו חד חד ערכי של המשטח σ על מישור yz אז שטף השדה

בכיוון החיובי של ציר הX

$$\iint_{\sigma}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)ds=\iint_{R}\mathbf{F}(g(y,z),y,z)\cdot\left(1,-\frac{\partial g}{\partial y},-\frac{\partial g}{\partial z}\right)dydz$$

בכיוון השלילי של ציר הX

$$\iint_{\sigma}\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)ds=\iint_{R}\mathbf{F}(g(y,z),y,z)\cdot\left(-1,\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\right)dydz$$

תרגילים - חשב את שטף השדה $\mathbf{F}$ דרך המשטח σ

7. $\mathbf{F}=(x+y)\hat{i}+(y+z)\hat{j}+(x+z)\hat{k}$, $\sigma:\begin{cases} x+y+z=1 \\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\end{cases}$ כלפי מעלה תשובה 1

8. $\mathbf{F}=x^2\hat{i}+xy\hat{j}+xz\hat{k}$, $\sigma:\begin{cases} 6x+3y+2z=6 \\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\end{cases}$ כלפי מעלה

9. $\mathbf{F}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, $\sigma:\begin{cases} z=1-x^2-y^2 \\ z\ge 0\end{cases}$ כלפי מעלה תשובה $\frac{3\pi}{2}$

10. $\mathbf{F}=z\hat{k}$, $\sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ כלפי מעלה תשובה $\frac{2\pi}{3}$

11. $\mathbf{F}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, $\sigma: z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ כלפי מעלה תשובה 54π

12. $\mathbf{F}=x\hat{i}+y\hat{j}+2z\hat{k}$, $\sigma:\begin{cases} z^2=x^2+y^2 \\ 1\le z\le 2\end{cases}$ כלפי מטה תשובה $\frac{14\pi}{3}$

13. $\mathbf{F}=x\hat{k}$, $\sigma:\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z\le y\end{cases}$ כלפי מטה תשובה 0

14. $\mathbf{F}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, $\sigma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ a>0\end{cases}$ כלפי חוץ תשובה $4\pi a^3$

3. אופרטור דיפרנציאלי ∇

1. אופרטור גזירה $\dfrac{d}{dx}$

2. נגררת = "הכפלה" של אופרטור $\dfrac{d}{dx}$ בפונקציה $\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$

3. אופרטור נבלא (אופרטור דל) $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

4. גרדיינט = "הכפלה" של אופרטור ∇ בשדה סקלרי $\varphi(x,y,z)$

$$\nabla\varphi=grad\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}$$

5. דיברגנץ = "הכפלה סקלרית" של אופרטור ∇ בשדה וקטורי

$$\mathbf{F}(x,y,z)=u(x,y,z)\hat{i}+v(x,y,z)\hat{j}+w(x,y,z)\hat{k}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=div\mathbf{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(u,v,w)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

6. רוטור = "הכפלה וקטורית" של אופרטור ∇ בשדה וקטורי

$$\mathbf{F}(x,y,z)=u(x,y,z)\hat{i}+v(x,y,z)\hat{j}+w(x,y,z)\hat{k}$$

$$\nabla\times\mathbf{F}=rot\mathbf{F}=curl\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ u&v&w\end{vmatrix}=$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}v\right)\hat{k}$$

תרגיל 15 – חשב את $div\mathbf{F}$ ואת $rot\mathbf{F}$ עבור

א) $\mathbf{F}=x^2yz\hat{i}+xy^2z\hat{j}+xyz^2\hat{k}$

תשובה $rot\mathbf{F}=x(z^2-y^2)\hat{i}+y(x^2-z^2)\hat{j}+z(y^2-x^2)\hat{k}$, $div\mathbf{F}=6xyz$

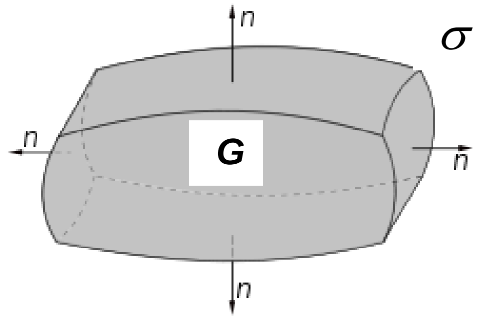
ב) $\mathbf{F}=yz\hat{i}+xz\hat{j}+xy\hat{k}$

תשובה $rot\mathbf{F}=0\hat{i}+0\hat{j}+0\hat{k}=\overline{0}$, $div\mathbf{F}=0$

ג) $\mathbf{F}=x^2y\hat{i}+y^2z\hat{j}+xz^2\hat{k}$

תשובה $rot\mathbf{F}=2x(z-y)\hat{i}+2y(x-z)\hat{j}+2z(y-x)\hat{k}$, $div\mathbf{F}=2(xy+yz+xz)$

משפט גאוס



יהי **G** גוף ששפתו σ רציפה למקוטעין ויהי

$$\mathbf{F}(x,y,z)=u(x,y,z)\hat{i}+v(x,y,z)\hat{j}+w(x,y,z)\hat{k}$$

שדה וקטורי כאשר לפונקציות $u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)$ קיימות נגזרות חלקיות רציפות בתחום **G**. אזי שטף השדה דרך σ כלפי חוץ שווה ל"מסה" של דיוורגנץ השדה בגוף

$$\iint_{\sigma}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds=\iiint_{G}div\mathbf{F}dV$$

(משמעות פיסיקלית של דיוורגנץ השדה בנקודה מסוימת – מידת התפשטות השדה בנקודה

$$div\mathbf{F}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iiint_{G}div\mathbf{F}dV=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_{\sigma}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$$)

תרגילים

16. (2011 מועד ב) חשבו את השטף $\oiint_S \vec{r}\vec{n}ds$ של שדה וקטורי $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ כאשר $\vec{n}$ הוא וקטור יחידה נורמל כלפי חוצה למשטח סגור S. ידוע גם שמשטח S הוא שפה של תחום תלת ממדי בעל נפח V=2 (תשובה 6)

17. (2011 מועד א) מצאו את שטף $\iint_S \vec{F}\vec{n}ds$ של השדה הוקטורי

$$\vec{F}=(x^3+y^2z^2)\vec{i}+[y^3-(x^2+z^2)^2]\vec{j}+\left(z^3+e^{xy}\right)\vec{k}$$

כאשר S - חצי פני כדור $x^2+y^2+z^2=4$ $y>0,$ ו- $\vec{n}$ נורמל חיצוני

18. חשב את שטף השדה $\mathbf{F}=4x\hat{i}-3y\hat{j}+7z\hat{k}$ דרך פאות הקובייה $0\le x,y,z\le 1$ כלפי חוץ (תשובה 8)

19. חשב את שטף השדה $\mathbf{F}=2x\hat{i}+2y\hat{j}+2z\hat{k}$ דרך פני כדור $x^2+y^2+z^2=9$ כלפי חוץ (תשובה 216π)

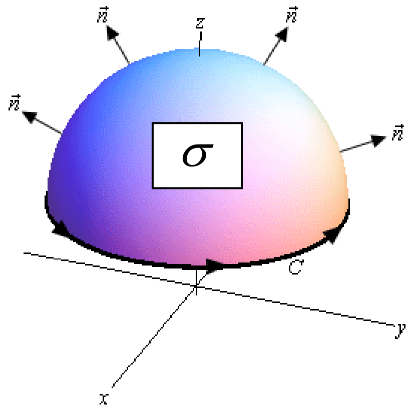
20. חשב את שטף השדה $\mathbf{F}=(x-z)\hat{i}+(y-x)\hat{j}+(z-y)\hat{k}$ דרך פני הגליל $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ 0\le z\le 1\end{cases}$ כלפי חוץ

(תשובה $3\pi a^2$)

21. חשב את שטף השדה $\mathbf{F}=\left(x^2+y\right)\hat{i}+xy\hat{j}-(2xz+y)\hat{k}$ דרך פני הטטראידר החסום על ידי המישור $x+y+z=1$ בתומן הראשון כלפי חוץ (תשובה $\frac{1}{24}$)

22. מצאו את שטף השדה הווקטורי $\vec{F}=x^3\hat{i}+x^2y\hat{j}+(z+2)\hat{k}$ דרך פני הגוף החסום על ידי המשטחים $y=0,\ z=0,\ y+z=5,\ z=4-x^2$ כלפי חוץ

משפט סטוקס



יהי σ משטח בר כיוון וחלק למקוטעין ששפתו היא C – עקומה פשוטה, סגורה וחלקה למקוטעין ויהי $\mathbf{F}(x,y,z)=u(x,y,z)\hat{i}+v(x,y,z)\hat{j}+w(x,y,z)\hat{k}$ - שדה וקטורי כאשר לפונקציות $u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)$ קיימות נגזרות חלקיות רציפות בתחום שמכיל את המשטח σ
אזי

$$\oint_C \mathbf{F}d\mathbf{r}=\iint_\sigma rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$$

כאשר כיוון של מסילה C מתואם עם כיוון שטף השדה עפ"י חוק הבורג ("למה מה" עם יד ימין)
(משמעות פיסיקלית של רוטור השדה בנקודה מסוימת – מידת ה"סיבוביות" השדה בנקודה

$$\left|rot\mathbf{F}\right|=\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma}\left|\iint_\sigma rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds\right|=\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma}\left|\oint_C \mathbf{F}d\mathbf{r}\right|$$)

תרגילים

23.(2011 מועד א) נתון שדה וקטורי $\vec{F}=x^2z\vec{i}-yx^2\vec{j}+3xz\vec{k}$

א. בדקו כי השדה משמר , ב. חשבו את צירקולציה $\oint_L \vec{F}d\vec{r}$

כאשר L הוא מסלול בצורת המשולש מ-$(0,0,0)$ ל-$(1,1,0)$, מ-$(1,1,0)$ ל-$(1,1,1)$ ומ-$(1,1,1)$ ל-$(0,0,0)$

24.(2011 מועד ג) קו סגור C הוא חיתוך של הגליל $x^2+y^2=a^2$ והמישור $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$.
הקו C מכוון נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים על המישור מהכיוון החיובי של הציר Oz.
שדה וקטורי מוגדר כדלקמן: $\vec{F}=(y-z,z-x,x-y)$. חשב את הצירקולציה של השדה לאורך הקו C: א) בחישוב ישיר, ב) תוך שימוש בנוסחת סטוקס

25. חשבו את $\oint_L \vec{F}d\vec{r}$ כאשר $\mathbf{F}=2z\hat{i}+3x\hat{j}+5y\hat{k}$ ו- $L:\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=0\end{cases}$ ישירות
ותוך שימוש במשפט סטוקס תוך שימוש ב- 2 משטחים שונים
$\sigma 1:\begin{cases}z=4-x^2-y^2\\ z\ge 0\end{cases}$ ו- $\sigma 2:\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ z=0\end{cases}$ (תשובה 12π)

26. חשבו את $\oint_L \vec{F}d\vec{r}$ כאשר $\mathbf{F}=z^2\hat{i}+2x\hat{j}-y^3\hat{k}$ ו- $L:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ (תשובה 2π)

27. חשבו את $\oint_L \vec{F}d\vec{r}$ כאשר $\mathbf{F}=xy\hat{i}+x^2\hat{j}+z^2\hat{k}$ ו- $L:z=x^2+y^2\cap z=y$ (תשובה 0)