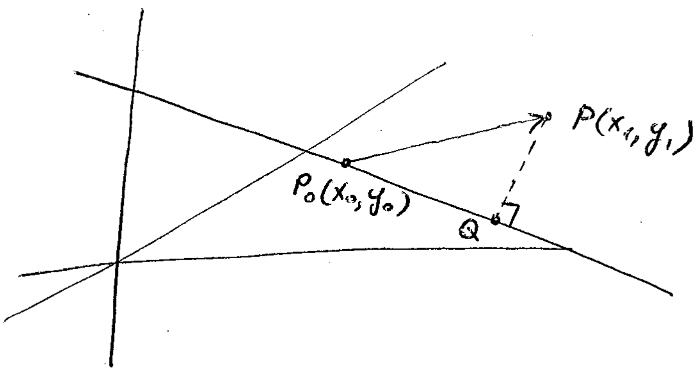
פתרונות לדף תרגיל 4   חדוא 2 להנדסת מכונות.

(1) המרחק בין נק' $P(x_1,y_1)$ ובין הישר $ax+by+c=0$, הוא

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

פתרון:



נסמן ב Q את הנק' של הישר, הקרובה ביותר לנק' P.

כעת, המרחק בין הנק' P והישר הוא $\|\overrightarrow{QP}\|$.

כדי למצוא זאת, נבחר נק' כלשהי של הישר, ונסמנה $P_0(x_0,y_0)$.

נבנה את הוקטור $\overrightarrow{P_0P} = \langle x_1-x_0,\ y_1-y_0\rangle$.

כעת, המרחק $\|\overrightarrow{QP}\|$ הוא בדיוק (הערך המוחלט של) ההיטל הסקלרי של $\overrightarrow{P_0P}$, בכיוון נורמל לישר.

טענה: $\langle a,b\rangle$ הוא וקטור נורמל לישר.

הוכחה: נבחר נק' (x,y) של הישר. (כלומר $ax+by+c=0$)

הוקטור $\langle x-x_0,\ y-y_0\rangle$ הוא מקביל לישר. נראה שהוא ניצב ל- $\langle a,b\rangle$:

$$\langle a,b\rangle\cdot\langle x-x_0,\ y-y_0\rangle = a(x-x_0)+b(y-y_0) = ax+by-(ax_0+by_0)$$
$$= -c-(-c) = 0$$

(הערה! (x_0,y_0) נק' של הישר, מתקיים $ax_0+by_0+c=0$, ולכן $ax_0+by_0=-c$. וכך לגבי הנק' (x,y).)

אם כן, המרחק הוא ההיטל הסקלרי של $\overrightarrow{P_0P}$ בכיוון $\langle a,b\rangle$ (הערך מוחלט) כלומר:

$$\left|\frac{\overrightarrow{P_0P}\cdot\langle a,b\rangle}{\|\langle a,b\rangle\|}\right| = \frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_1+by_1-(ax_0+by_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

משוואה למישור המוגדר ע"י שני הישרים (2)

$L_1(t) = (2t+1,\ 3t+2,\ 4t+3)$

$L_2(s) = (s+2,\ 2s+4,\ -4s-1)$.

<u>פתרון:</u> עבור L_1, נבחר נק' עליו, $P_1(1,2,3)$, ווקטור כיוון $\bar{V}_1 = \langle 2,3,4\rangle$.

" L_2, $P_2(2,4,-1)$, $\bar{V}_2 = \langle 1,2,-4\rangle$.

נבדוק תחילה שהישרים אינם מצטלבים, כי ישרים מצטלבים <u>אינם</u> מגדירים מישור.

נבחין: $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 1,2,-4\rangle$. כעת,

הישרים L_1 ו L_2 מצטלבים $\iff$ $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\bar{V}_1\times\bar{V}_2) \neq 0$.

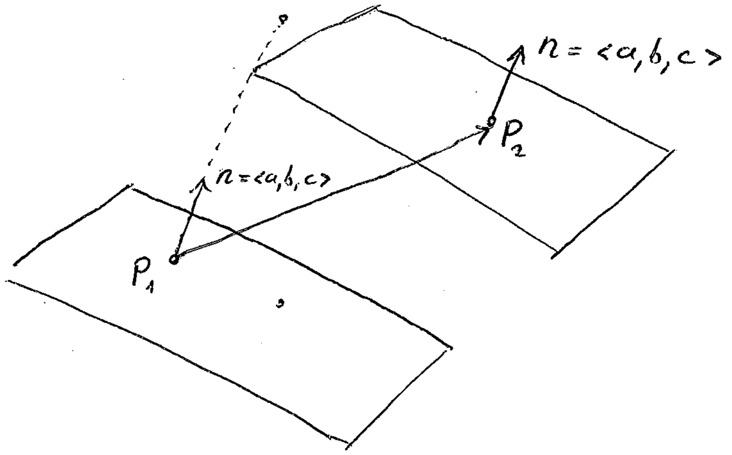
אבל הנ"ל קיבלנו ש $\overrightarrow{P_1P_2} = \bar{V}_2$, כלומר שהמכפלה המעורבת מתאפסת,

ולכן הישרים אינם מצטלבים.

$$\vec{n} := \bar{V}_1\times\bar{V}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \hat{i}(-12-8) - \hat{j}(-8-4) + \hat{k}(4-3) = -20\hat{i} + 12\hat{j} + \hat{k}$$

כעת, בהינתן הנורמל, ונק' על המישור (למשל P_2), נכתוב את משוואת המישור

$$-20(x-2) + 12(y-4) + (z+1) = 0.$$



נבחר נק' P_1, $P_1(x_1,y_1,z_1)$ על המישור האחד, ו- $P_2(x_2,y_2,z_2)$ על המישור השני.

נגדיר וקטור

$$\overrightarrow{P_1P_2} = <x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1> .$$

המרחק בין המישורים הוא (הערך המוחלט של) הרכיב הסקלרי, של הוקטור $\overline{P_1P_2}$, בכיוון $\vec{n}$,

כאשר $\bar{n}$ הוא הנורמל למישורים:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \hat{n}\right| = \left|<x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1> \cdot \frac{<a,b,c>}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

$$= \frac{|ax_2+by_2+cz_2 - (ax_1+by_1+cz_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dots$$

אבל הנ"ל ! P_1 נק' במישור הראשון, מתקיים $ax_1+by_1+cz_1+d_1=0$

ובדומה עבור P_2 והמישור השני. לכן...

$$\dots = \frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

(4) משוואה עבור L_1: וקטור כיוון:

$$v_1 = \langle 2-1,\ 4-2,\ 8-6 \rangle = \langle 1, 2, 2 \rangle$$

(וקטור הכיוון) $\boxed{\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-6}{2}}$ (נק' על הישר)

או בצורה וקטורית:

$$\boxed{r(t) = \langle 1,2,6 \rangle + t \cdot \langle 1,2,2 \rangle}$$

משוואה עבור L_2:

משוואה עבור המישור השני: מהנק' $A(3,2,-1), B(0,0,1), C(1,2,1)$

נבנה שני וקטורים

$$u = \vec{BA} = \langle 3,2,-2 \rangle$$

$$w = \vec{BC} = \langle 1,2,0 \rangle$$

$$u \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \langle 4, -2, 4 \rangle$$

ולכן בתור נורמל למישור אפשר לקחת

$\vec{n} = \langle 2,-1,2 \rangle$.

$$2(x-0) - 1\cdot(y-0) + 2(z-1) = 0$$

$$\boxed{2x - y + 2z - 2 = 0}$$

הישר L_2 הוא חיתוך המישורים

$$2x - y + 2z - 2 = 0,$$

$$x - y + 2z + 1 = 0$$

(כלומר הישר L_2 הוא אוסף הנק' (x,y,z), שמספקות את שתי המשוואות הללו.)

חיסור המשוואות נותן:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

(כלומר הישר L_2 מוכל במישור $x=3$, ובפרט, רכיב x של וקטור הכיוון שלו הוא 0).

נציב $x=3$ באחת ממשוואות המישורים, ונקבל

$$4 - y + 2z = 0$$

$$2z = y - 4$$

$$z = \frac{y-4}{2}$$

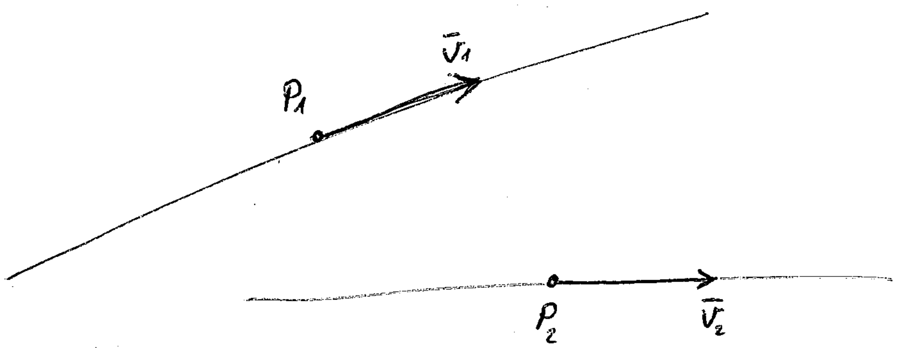
וכך, משוואה עבור L_2 תהיה

$$\boxed{x = 3,\ \frac{y-4}{2} = z}$$

או בצורה וקטורית

$$\bar{r}(s) = \langle 3,4,0 \rangle + s \cdot \langle 0,2,1 \rangle$$

(המשך 4) כעת, בהינתן שני ישרים במרחב



מה המרחק ביניהם? נבנה את הוקטור $\overrightarrow{P_1P_2}$.

המרחק הוא הרכיב (ערך מוחלט של) הסקלרי של $\overrightarrow{P_1P_2}$, בכיוון וקטור שניצב ל V_1 וגם ל- V_2,

כלומר

$$\left| \overrightarrow{P_1P_2} \circ \frac{\bar V_1 \times \bar V_2}{\| \bar V_1 \times \bar V_2 \|} \right|.$$

<u>הערה</u>: אם $\overline{P_1P_2} \circ (\bar V_1 \times \bar V_2) = 0$

- אם $V_1 \times V_2 = \bar 0$ אז הישרים <u>מקבילים</u>
- אם $\bar V_1 \times \bar V_2 \neq \bar 0$ (ועדיין $0 = \bar P_1 \bar P_2 \circ (V_1 \times V_2)$) אז הישרים <u>נחתכים</u>.

אצלנו, $P_1(1,2,6)$, $P_2(3,4,0)$ וכן $\overline{P_1P_2} = <2,2,-6>$

$\bar V_1 = <1,2,2>$, $\bar V_2 = <0,2,1>$.

$$V_1 \times V_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = <2,-2,1>$$

$$\| V_1 \times V_2 \| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\left| \overline{P_1P_2} \circ \frac{\bar V_1 \times \bar V_2}{\| V_1 \times V_2 \|} \right| = \left| <2,2,-6> \circ <\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}> \right| = \left| \frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{6}{3} \right| = 2$$

(5) נסמן v במקום $v(t)$, וכן v' במקום $v'(t)$, וכו'.

תחילה נראה ש:

(i) $$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$(u\cdot v)' = (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)' = (u_1' v_1 + u_1 v_1' + u_2' v_2 + u_2 v_2' + u_3' v_3 + u_3 v_3')$$

$$= (u_1' v_1 + u_2' v_2 + u_3' v_3) + (u_1 v_1' + u_2 v_2' + u_3 v_3') = u'\cdot v + u\cdot v'$$

כעת נראה ש:

(ii) $$(v\times w)' = v'\times w + v\times w'$$

$$(v\times w)' = [(v_2 w_3 - v_3 w_2,\ -v_1 w_3 + v_3 w_1,\ v_1 w_2 - v_2 w_1)]' =$$

$$= (v_2' w_3 + v_2 w_3' - v_3' w_2 - v_3 w_2',\ -v_1' w_3 - v_1 w_3' + v_3' w_1 + v_3 w_1',$$
$$v_1' w_2 + v_1 w_2' - v_2' w_1 - v_2 w_1')$$

$$= (v_2' w_3 - v_3' w_2,\ -v_1' w_3 + v_3' w_1,\ v_1' w_2 - v_2' w_1) +$$
$$(v_2 w_3' - v_3 w_2',\ -v_1 w_3' + v_3 w_1',\ v_1 w_2' - v_2 w_1')$$

$$= v'\times w + v\times w'.$$

לבסוף,

$$[u\cdot(v\times w)]' \overset{\text{לפי (i)}}{=} u'\cdot(v\times w) + u\cdot(v\times w)'$$

$$\overset{\text{לפי (ii)}}{=} u'\cdot(v\times w) + u\cdot(v'\times w + v\times w')$$

$$= u'\cdot(v\times w) + u\cdot v'\times w + u\cdot v\times w'$$

$$r(t) = (t\sin t + \cos t,\ \ t\cos t - \sin t)$$

$$r'(t) = (\sin t + t\cos t - \sin t,\ \ \cos t + t\sin t - \cos t)$$

$$= (t\cos t,\ -t\sin t) = t\cdot(\cos t,\ -\sin t)$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = |t|$$

אורך המסלול, עבור $\sqrt{2} \le t \le 2$:

$$l = \int_{t=\sqrt{2}}^{2} \|r'(t)\|\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{2} |t|\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{2} t\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{1}{2}(4-2) = 1$$

משוואת משיק: נק' ההשקה היא $r(\sqrt{2}) =$

$$r(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}\sin\sqrt{2} + \cos\sqrt{2},\ \sqrt{2}\cos\sqrt{2} - \sin\sqrt{2}).$$

וקטור משיק בנק' זו הוא

$$r'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\,(\cos\sqrt{2},\ -\sin\sqrt{2})$$

לכן, משוואת המשיק (הצורה פרמטרית) היא.

$$p(t) = r(\sqrt{2}) + t\cdot r'(\sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{2}\sin\sqrt{2} + \cos\sqrt{2} + t\sqrt{2}\cos\sqrt{2},\ \ \sqrt{2}\cos\sqrt{2} - \sin\sqrt{2} - t\sqrt{2}\sin\sqrt{2}).$$

נכתוב גם משוואת ישר רגילה:

מתוך $r'(\sqrt{2})$, נמצא את שיפוע הישר:

$$m = \frac{\text{רכיב } y \text{ של } r'(\sqrt{2})}{\text{רכיב } x \text{ של } r'(\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cos\sqrt{2}} = -tg(\sqrt{2})$$

וכן:

$$y - (\sqrt{2}\cos\sqrt{2} - \sin\sqrt{2}) = -tg\sqrt{2}\,\big(x - (\sqrt{2}\sin\sqrt{2} + \cos\sqrt{2})\big)$$

$$y = -tg(\sqrt{2})\,x + \sqrt{2}\,\frac{\sin^2\sqrt{2}}{\cos\sqrt{2}} + \sin\sqrt{2} + \sqrt{2}\cos\sqrt{2} - \sin\sqrt{2}$$

$$\boxed{y = -tg(\sqrt{2})\,x + \frac{\sqrt{2}}{\cos\sqrt{2}}}$$

$$r(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1)$$ (8)

$$r'(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1) + e^t(-\sin t, \cos t, 0)$$
$$= e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1)$$

$$|r'(t)| = e^t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t \underline{- 2\sin t \cos t} + \sin^2 t + \cos^2 t \underline{+ 2\sin t \cos t} + 1}$$
$$= \sqrt{3}\, e^t$$

$$s(t) := \int_0^t |r'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{3} e^\tau d\tau = \sqrt{3}\, e^\tau\Big|_0^t = \sqrt{3}(e^t - 1).$$

כעת, אורך המסלול $r(t)$, עבור $-\ln 4 \le t \le 0$ הוא

$$|s(-\ln 4)| = |\sqrt{3}(e^{-\ln 4} - 1)| = |\sqrt{3}(\tfrac{1}{4} - 1)| = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$u(t) := r(t) \cdot (r'(t) \times r''(t))$$ (6)

לפי תרגיל 5,

$$u'(t) = \underbrace{r' \cdot (r' \times r'')}_{=0} + r \cdot \underbrace{(r'' \times r'')}_{=\bar{0}} + r \cdot (r' \times r''') = r \cdot (r' \times r''').$$

כי $r' \times r''$ ניצב ל- r'.