חדו"א 2 להנדסת מכונות
גליון תרגילים מספר 1
פתרון

1. א. נתונים הטורים (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ ו- (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{6^n}$

(1) מתכנס כטור גיאומטרי ($\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $|q|<1$)

(2) מתכנס מאותה סיבה

לכן גם טור מקורי $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{7}{6^n}\right)$ מתכנס כהפרש של שני טורים מתכנסים ומתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{7}{6^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-7\cdot\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=1-\frac{7}{5}=-\frac{2}{5}$$

ב. $$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+1}-\frac{3n+3}{n+2}\right)=$$

$$=3\cdot\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)$$

נתבונן בטור $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)$

נבנה סדרת סכומים חלקיים:

$$S_1=\frac{4}{5}-\frac{5}{6}$$

$$S_2=\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}-\frac{6}{7}\right)=\frac{4}{5}-\frac{6}{7}$$

$\vdots$

$$S_n = \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} - \frac{6}{7}\right) + \dots + \left(\frac{n+3}{n+4} - \frac{n+4}{n+5}\right) =$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{n+4}{n+5}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$$

לכן טור $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2}\right)$ מתכנס ומתקיים

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2}\right) = -\frac{1}{5}$$

מכאן נובע

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+1} - \frac{3n+3}{n+2}\right) = -\frac{3}{5}$$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{3n+7}$

נשים לב כי $\lim_{n \to \infty} \ln \frac{n}{3n+7} = \ln\frac{1}{3} \neq 0$

תנאי הכרחי להתכנסות הטור לא מתקיים.
מסקנה: טור מתבדר.

ג. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

נציג איבר כללי של הטור כסכום של שני שברים יסודיים

$$\frac{4}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+1}$$

$$A\cdot(4n+1)+B(4n-3)=4$$

$$n=-\frac{1}{4}:\ B=-1$$

$$n=\frac{3}{4}:\quad A=1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$$

נבנה סדרת סכומים חלקיים:

$$S_1=\frac{1}{5}-\frac{1}{9}$$

$$S_2=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{13}$$

$$\vdots$$

$$S_n=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\dots+\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+5}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{4n+5}$$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4n+5}\right)=\frac{1}{5}$. סדרת סכומים חלקיים מתכנסת לכן הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$ מתכנס ומתקיים

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{5}$$

ד. $$\sum_{n=-3}^{\infty}e^{-4n}=\sum_{n=-3}^{\infty}\left(\frac{1}{e^4}\right)^n=\sum_{n+3=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^4}\right)^n=$$

$$=\left\{\begin{matrix} i=n+3\\ n=i-3\end{matrix}\right\}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^4}\right)^{i-3}=\left(\frac{1}{e^4}\right)^{-3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^4}\right)^{i}$$

$$= e^{12} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^4}\right)^i}_{} = e^{12} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{e^4}} = \frac{e^{16}}{e^4 - 1}$$

טור הנדסי עם $q = \frac{1}{e^4} < 1$

לכן טור מתכנס.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

טור מתבדר כי איבר כללי לא שואף לאפס כאשר $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0$$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} =$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n}_{} = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{4}$$

טור הנדסי עם $q = -\frac{1}{3}$

$|q| < 1$ לכן טור מתכנס.

2. א. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n}_{}$

טור הנדסי עם $q = 2x$

עבור $|2x| < 1$ טור מתכנס

עבור $|2x| \geq 1$ טור מתבדר

<u>תשובה</u>: טור מתכנס עבור $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ וסכום הטור $S = \frac{2x}{1-2x}$; עבור $|x| \geq \frac{1}{2}$ טור מתבדר.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x+1)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} [3\cdot(x+1)]^n}$

טור הנדסי עם $q = 3(x+1)$

עבור $|3(x+1)| < 1$ טור מתכנס

עבור $|3(x+1)| \geq 1$ טור מתבדר

תשובה: טור מתכנס עבור $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$ וסכום

הטור במקרה הזה שווה: $S = -\frac{3(x+1)}{2+3x}$

רק ב $x \in (-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [-\frac{2}{3}, +\infty)$ טור מתבדר.

ג.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x = \begin{cases} \frac{\sin x}{1-\sin x}, & |\sin x| < 1 \\ \text{מתבדר} & |\sin x| \geq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin x}{1-\sin x}, & \sin x \neq \pm 1 \\ \text{מתבדר}, & \sin x = \pm 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin x}{1-\sin x}, & x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \text{מתבדר}, & x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

3.

א. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$$

נשווה את הטור הנתון עם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{5n+2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{5} \neq 0$$

לפי מבחן השוואה גבולי טורים מתבדרים או מתכנסים יחד.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר (טור הרמוני)

לכן גם טור הנתון <u>מתבדר.</u>

ב. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln n}$$

נתבונן בפונקציה $f(x)=\frac{1}{x\cdot \ln x}$. פונק' מונוטונית יורדת בתחום $x \geq 2$.

נשתמש במבחן אינטגרלי

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\cdot \ln x}dx = \left\{ \begin{array}{l} t=\ln x \\ dt=\frac{dx}{x} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \infty$$

אינטגרל מתבדר לכן גם טור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln n}$ <u>מתבדר.</u>

ג.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(1+\ln^2 n)}$$

$$1+\ln^2 n > \ln^2 n$$

$$\frac{1}{n\cdot(1+\ln^2 n)} < \frac{1}{n\cdot \ln^2 n} \quad (*)$$

נשווה את הטור הנתון עם טור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln^2 n}$

טור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln^2 n}$ מתכנס לפי מבחן אינטגרלי:

$\frac{1}{x\cdot \ln^2 x}$ מונוטונית יורדת בתחום $x \geq 2$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot \ln^2 x} \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{t^{-2+1}}{-1}\Big|_{\ln 2}^{+\infty} =$$

$$= 1/\ln 2 = \frac{1}{\ln 2}$$

לכן טור מקורי מתכנס לפי מבחן השוואה ראשון.
(בגלל (*)).

ד.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$$

נשתמש במבחן קושי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1$$

טור <u>מתכנס</u>

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+5}}$

נשווה את הטור עם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+5}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{n^{3/2}\sqrt{1+\frac{5}{n^3}}} = 1 \neq 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ מתכנס ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס עבור $1<p$

ומתבדר עבור $p \leq 1$)

לכן טור מקורי מתכנס לפי מבחן השוואה בגבולי.

ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)+4}{2^n}$

נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$. הטור הזה מתכנס

לפי מבחן השוואה:

$$\frac{\sin^2 n}{2^n} < \frac{1}{2^n}$$

($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ מתכנס!)

נתבונן בטור $4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}$ לכן טור מתכנס

כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ מתכנס (טור הנדסי עם $|q| = \frac{1}{2} < 1$)

לכן טור מקורי מתכנס כסכום של שני טורים מתכנסים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n+4}{2^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}}_{\text{מתכנס}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}}_{\text{מתכנס}}$$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$

נשווה את הטור הנתון עם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (טור מתבדר)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

לפי מבחן השוואה גבולי טורים $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$
ו $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתכנסים או מתבדרים יחד.
ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, לכן טור מקורי
$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$ מתבדר.