דף תרגילים 3 ־ פתרונות

חדו"א 2 להנדסת מכונות ־ סמסטר ב' תשע"ו

.1

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2\cdot(2k)!}$$

מכיוון שהטור מקלורן של $\cos(x)$ שווה לערך הפונקציה לכל x כך גם השוויונות לעיל נכונים לכל x. מכיוון שפיתוח לטור חזקות סביב0 הוא יחיד, זהו טור מקלורן של $\cos^2(x)$.

.2 ניזכר שההטלה $\mathrm{Proj}_u(v)$ של v על u , מקבילה ל u ואילו $v-\mathrm{Proj}_u(v)$ מאונך ל־ u.

(א)

$$|u| = \sqrt{1^2+2^2+4^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21} = 3\sqrt{3}$$
$$|v| = \sqrt{(-5)^2+3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{36} = 6$$

$$\mathrm{Proj}_u(v) = \frac{v\cdot u}{u\cdot u}u = \frac{1\cdot(-5)+2\cdot 0+4\cdot 3}{36}(-5i+3k) =$$

$$= \frac{7}{36}(-5i+3k) = -\frac{35}{36}i + \frac{7}{12}k$$

וזהו הרכיב המקביל ל u.

$$v - \mathrm{Proj}_u(v) = (i+2j+4k) - (-\frac{35}{36}i + \frac{7}{12}k) = \frac{71}{36}i + 2j + \frac{55}{12}k$$

וזהו הרכיב המאונך ל־ u.

(ב)

$$|u| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}.$$
$$|v| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56}.$$
$$\text{Proj}_u(v) = \frac{v \cdot u}{|u|^2} u = \frac{-3 \cdot 6 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-4)}{56} \big(-3i + j + 2k \big) =$$
$$= -\frac{28}{56}(-3i + j + 2k) = -\frac{1}{2}(-3i + j + 2k) = -\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}j + k.$$
$$v - \text{Proj}_u(v) = \left(6 + \frac{3}{2}\right) i + \left(-2 - \frac{1}{2}\right) j + (-4 - 1)\, k = \frac{15}{2}i - \frac{5}{2}j - 5k.$$

(ג)

$$|u| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}.$$
$$|v| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}.$$
$$\text{Proj}_u(v) = \frac{v \cdot u}{|u|^2} u = \frac{3 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2}{24} \big(4i - 2j + 2k \big) =$$
$$= \frac{14}{24}(4i - 2j + 2k = \frac{7}{12}(4i - 2j + 2k) = \frac{7}{3}i - \frac{7}{6}j + \frac{7}{6}k.$$
$$v - \text{Proj}_u(v) = \left(4 - \frac{7}{3}\right) i + \left(-2 + \frac{7}{6}\right) j + \left(2 - \frac{7}{6}\right) k = \frac{5}{3}i - \frac{5}{6}j + \frac{5}{6}k.$$

3. תנאי מספיק והכרחי לכך ש־ $u+v$ ניצב ל־ $u-v$ היא שהזווית ביניהם ישרה, או שהמכפלה הסקלרית ביניהם היא 0 כלומר

$$u+v \perp u-v \iff (u+v)\cdot(u-v) = 0 \iff u\cdot u - u\cdot v + v\cdot u - v\cdot v = 0$$

המכפלה הסקלרית היא סימטרית, לכן $u \cdot v = v \cdot u$ לכן התנאי למעלה שקול לתנאי $u \cdot u - v \cdot v = 0$ כלומר $|u|^2 = |v|^2$. מכיוון שאורך וקטור הוא תמיד אי־שלילי, זה שקול לתנאי $|u| = |v|$.

4. (א)

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} k =$$
$$= (6 \cdot 3 - 0 \cdot 1)i - (2 \cdot 3 - 2 \cdot 1)j + (2 \cdot 0 - 2 \cdot 6)k =$$
$$= 18i - 4j - 12k$$

שטח המקבילית הנוצרת הוא בדיוק
$$|u \times v| = \sqrt{18^2 + (-4)^2 + (-12)^2} = \sqrt{484} = 22.$$

(ב)

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} k =$$
$$= (2 \cdot 3 - 0 \cdot 2)i - (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2)j + (2 \cdot 0 - 3 \cdot 2)k =$$
$$= 6i - 6k$$

שטח המקבילית הנוצרת הוא בדיוק
$$|u \times v| = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

(ג) בסעיף זה ניתן היה לחשב ולהגיע לאפס אבל ברור שהוקטורים מקבילים זה לזה ($v = \frac{3}{2}u$) ולכן המכפלה הוקטורית ביניהם מתאפסת וגם שטח המקבילית ביניהם הוא 0.

5. (א) נשים לב שהוקטור $(u \times v) \times (u \times w)$ מאונך לוקטורים $u \times v$ ו־$u \times w$.
על מנת לקבל וקטור יחידה באותו כיוון, נחלק אותו באורכו, כלומר בשורש של המכפלה הסקלרית שלו עם עצמו. אז התוצאה היא

$$\frac{(u \times v) \times (u \times w)}{\sqrt{\Big((u \times v) \times (u \times w)\Big) \cdot \Big((u \times v) \times (u \times w)\Big)}}$$

(ב) כמו בסעיף א, בשביל למצוא וקטור בכיוון מאונך ל $u + v$ ול־ $u - w$ ניקח את $(u + v) \times (u - w)$ ובשביל שהוא יהיה באורך 3, נחלק אותו באורכו

כדי לקבל וקטור יחידה ונכפל ב־3 אז התשובה היא

$$\frac{3\cdot(u+v)\times(u-w)}{\sqrt{\Big((u+v)\times(u-w)\Big)\cdot\Big((u+v)\times(u-w)\Big)}}$$

(ג) תשובה אפשרית יכולה להיות $\Big|w\cdot\big((u+v)\times(u\times v)\big)\Big|$ או $\Big|(u+v)\cdot\big(w\times(u\times v)\big)\Big|$ או כל שינוי סדר בתשובה בין w, $u+v$ ו־$u\times v$.

6. לפני סעיף א, נוכיח את השוויון הבא:

- (i) לכל שלושה וקטורים a,b,c במרחב מתקיים $a\times(b\times c)=(a\cdot c)b-(a\cdot b)c$.

הוכחה:

$$a \times (b \times c) = a \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$a \times \Big((b_2c_3 - b_3c_2)i - (b_1c_3 - b_3c_1)j + (b_1c_2 - b_2c_1)k \Big) =$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ (b_2c_3 - b_3c_2) & (b_3c_1 - b_1c_3) & (b_1c_2 - b_2c_1) \end{vmatrix} =$$

$$\Big(a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \Big) i -$$
$$- \Big(a_1(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_2c_3 - b_3c_2) \Big) j +$$
$$+ \Big(a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \Big) k =$$

$$\Big((a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \Big) i -$$
$$- \Big((a_1c_1 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_3b_3)c_2 \Big) j +$$
$$+ \Big((a_1c_1 + a_2c_2)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2)c_3 \Big) k =$$

$$\Big((a_2c_2 + a_3c_3)b_1 + a_1b_1c_1 - a_1b_1c_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \Big) i -$$
$$- \Big((a_1c_1 + a_3c_3)b_2 + a_2b_2c_2 - a_2b_2c_2 - (a_1b_1 + a_3b_3)c_2 \Big) j +$$
$$+ \Big((a_1c_1 + a_2c_2)b_3 + a_3b_3c_3 - a_3b_3c_3 - (a_1b_1 + a_2b_2)c_3 \Big) k =$$

$$\begin{aligned}
&\Big((a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1\Big)i-\\
&-\Big((a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_2-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_2\Big)j+\\
&+\Big((a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_3-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_3\Big)k=\\
&(a\cdot c)b-(a\cdot b)c
\end{aligned}$$

(א) לפי השוויון ב (i):

$$\begin{aligned}
&u\times(v\times w)+v\times(w\times u)+w\times(u\times v)=\\
&(u\cdot w)v-(u\cdot v)w+(v\cdot u)w-(v\cdot w)u-(w\cdot v)u-(w\cdot u)v=\\
&=(u\cdot w)v-(w\cdot u)v=0
\end{aligned}$$

(ב) נתחיל מאגף ימין:

$$u\cdot(v\times i)i+u\cdot(v\times j)j+u\cdot(v\times k)k=$$

$$\begin{aligned}
&u\cdot\Big((0v_2-0v_3)i-(0v_1-1v_3)j+(0v_1-1v_2)k\Big)i+\\
&u\cdot\Big((0v_2-1v_3)i-(0v_1-0v_3)j+(1v_1-0v_2)k\Big)j+\\
&u\cdot\Big((1v_2-0v_3)i-(1v_1-0v_3)j+(0v_1-0v_2)k\Big)k=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u\cdot(0i+v_3j-v_2k)i+u\cdot(-v_3i+0j+v_1k)j+u\cdot(v_2i-v_1j+0k)k=\\
&(u_2v_3-u_3v_2)i-(u_1v_3-v_3u_1)j+(u_1v_2-u_2v_1)k=u\times v
\end{aligned}$$

7. השוויון נכון. בשביל להוכיח אותו ראשית נשים לב ש־ $u\cdot(v\times w)=w\cdot(u\times v)=(u\times v)\cdot w$

לכן מספיק להראות ש־ $u\times(u\times(u\times v)))=-|u|^2u\times v$.

נתחיל מאגף שמאל ונשתמש בשוויון $((i))$:

$$
\begin{aligned}
&u \times (u \times (u \times v)) = \\
&u \times \big((u \cdot v)u - (u \cdot u)v\big) = \\
&\big((u \cdot v)u \times u\big) - \big((u \cdot u)u \times v\big) = \\
&0 - |u|^2 u \times v
\end{aligned}
$$