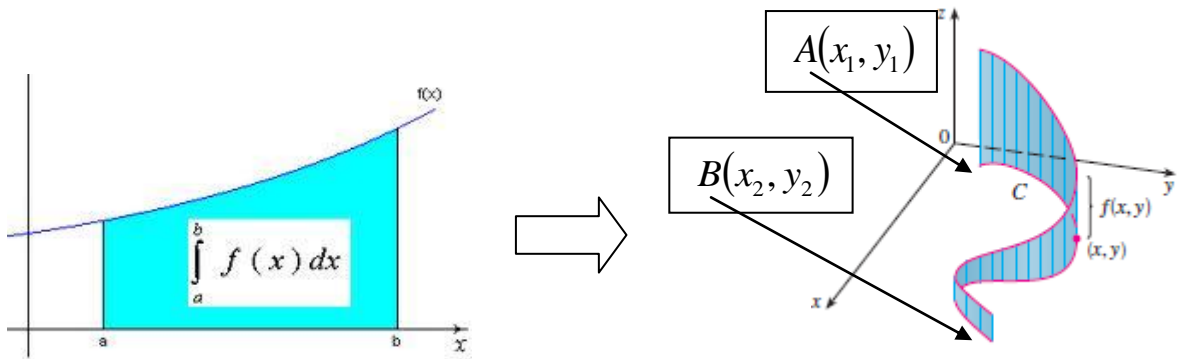


1. אינטגרל קווי מסוג 1 של פונקציה סקלרית  $f(x, y)$



$$\int_C f(x, y) dl = \int_A^B f(x, y) dl = \int_A^B f(x, y) \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, g(x)) \sqrt{1 + \left(\frac{dg}{dx}\right)^2} \cdot dx \quad (C: y = g(x), x_2 > x_1)$$

$$\int_{y_1}^{y_2} f(h(y), y) \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2} \cdot dy \quad (C: x = h(y), y_2 > y_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt \quad \left( C: \begin{cases} x = x(t), x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2 \\ y = y(t), y(t_1) = y_1, y(t_2) = y_2 \\ t_2 > t_1 \end{cases} \right)$$

$$\int_A^B f(x, y) dl = \int_B^A f(x, y) dl \quad \text{הערה}$$

תרגילים - חשב את האינטגרל

1.  $C: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t^2 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$  כאשר  $\int_C \frac{x}{1+y} dl$

א. בצורה פרמטרית ב. על ידי הצגת  $C: y = g(x)$

2. כאשר  $C$  - חצי המעגל העליון  $x^2 + y^2 = 1$   $\int_C (1 - x^2) dl$

תשובה  $\pi$  רמז - להציג את המעגל בצורה פרמטרית  $C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi$

תשובה 2 3. כאשר  $C: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{2t^{1.5}}{3} \end{cases}, 0 \leq t \leq 3$   $\int_C \frac{dl}{1+x}$

2. אינטגרל קווי מסוג 1 של פונקציה סקלרית  $f(x, y, z)$

$$\int_C f(x, y, z) dl = \int_A^B f(x, y, z) dl = \int_A^B f(x, y, z) \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

$$C: \begin{cases} x = x(t), x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2 \\ y = y(t), y(t_1) = y_1, y(t_2) = y_2, \\ z = z(t), z(t_1) = z_1, z(t_2) = z_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) \\ t_2 > t_1 \end{matrix} \quad \text{כאשר}$$

הערות

1. ניתן להגדיר אחד המשתנים  $(x, y, z)$  בתור פרמטר המסילה

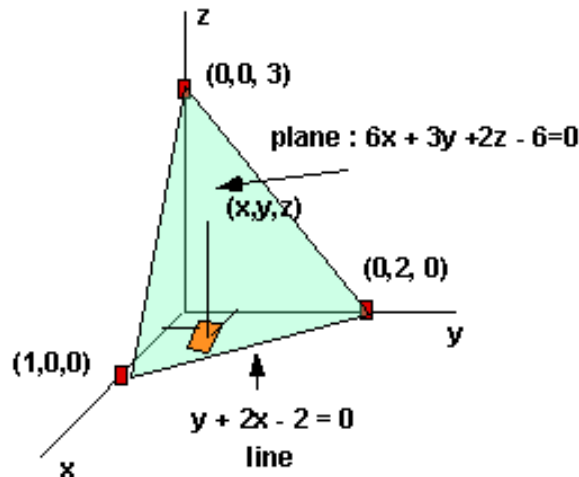
$$2. \int_A^B f(x, y, z) dl = \int_B^A f(x, y, z) dl$$

תרגילים - חשב את האינטגרל

4.  $\int_C (xy + z^2) dl$  כאשר  $C$  היא עקומה

א.  $t^2 \hat{i} + t^3 \hat{j} + t^{1.5} \hat{k}, 0 \leq t \leq 1$

ב. משולש הנוצר על ידי חיתוך המישור  $6x + 3y + 2z - 5 = 0$  עם המישורים  $xy, yz, xz$



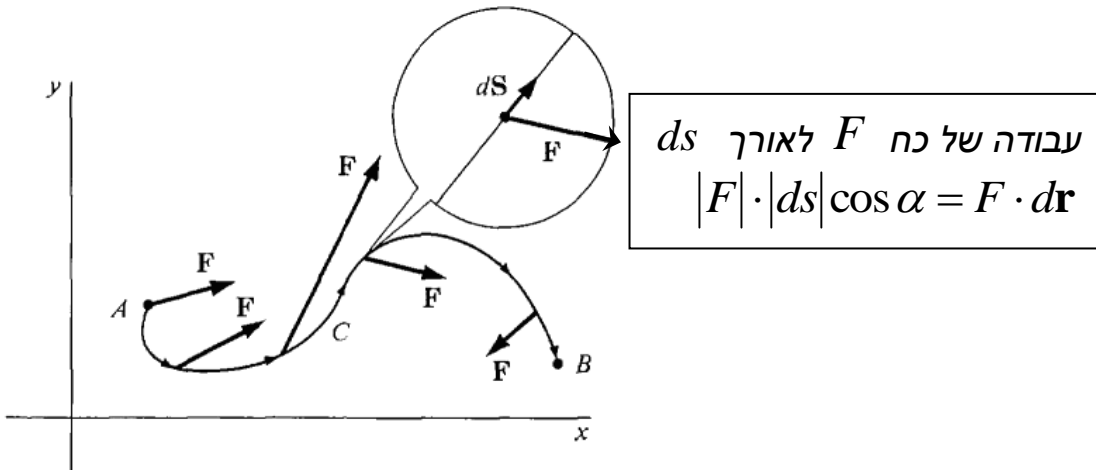
5.  $\int_C 3x^2 yz dl$  כאשר  $C$  היא עקומה  $t \hat{i} + t^2 \hat{j} + \frac{2}{3} t^3 \hat{k}, 0 \leq t \leq 1$  תשובה  $\frac{13}{20}$

6. חשב את המסה של תיל דק המעוצב בצורת הקשת המעגלית  $y = \sqrt{9 - x^2} (0 \leq x \leq 3)$

כאשר צפיפות הקווית  $\rho(x, y) = kx\sqrt{y} (k > 0)$  תשובה  $6k\sqrt{3}$

3. אינטגרל קווי מסוג 2 של פונקציה וקטורית

$$F(x, y, z) = u(x, y, z)\hat{i} + v(x, y, z)\hat{j} + w(x, y, z)\hat{k}$$



$$\int_C F(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B u(x, y, z)dx + v(x, y, z)dy + w(x, y, z)dz =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ u(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + v(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + w(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt$$

$$C: \begin{cases} x = x(t), x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2 \\ y = y(t), y(t_1) = y_1, y(t_2) = y_2, \\ z = z(t), z(t_1) = z_1, z(t_2) = z_2 \end{cases} \quad \text{כאשר } A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$$

הערות

1. ניתן להגדיר אחד המשתנים  $(x, y, z)$  בתור פרמטר המסילה

$$\int_A^B F(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = - \int_B^A F(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} \quad .2$$

תרגילים - חשב את האינטגרל

7.  $\int_C F(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}$  כאשר  $F(x, y, z) = yz\hat{i} + xz\hat{j} + xy\hat{k}$  ו-  $\mathbf{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$

8.  $\int_C -ydx + xdy$  לאורך  $y^2 = 3x$  מהנקודה  $(3,3)$  עד הנקודה  $(0,0)$  תשובה 3

9.  $\int_C (y-x)dx + x^2dy$  לאורך  $y^2 = 3x$  מהנקודה  $(1,-1)$  עד הנקודה  $(1,1)$

10.  $\int_C x^2zdx - x^2ydy + 3xzdz$  לאורך המסלול  $C: (0,0,0) \rightarrow (1,1,1) \rightarrow (1,1,1) \rightarrow (0,0,0)$

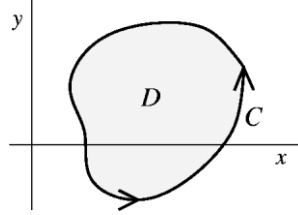
11. חשב את העבודה שמבצע הכוח  $F(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2}\hat{i} + \frac{4}{x^2 + y^2}\hat{j}$  על החלקיק נע

תשובה  $\frac{5}{4} - \frac{\pi}{8} + \tan^{-1} 2$

$C: (1,1) \rightarrow (2,2) \rightarrow (4,2)$

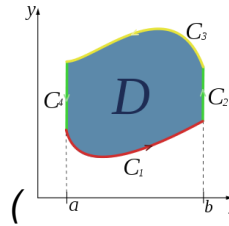
לאורך המסלול

4. משפט גרין (עבור פונקציה וקטורית  $F(x, y) = u(x, y)\hat{i} + v(x, y)\hat{j}$  המוגדרת במישור)

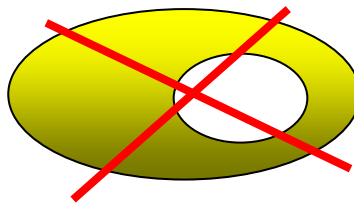


$$\oint_C F(x, y) \cdot dr = \oint_C u(x, y)dx + v(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) dx dy$$

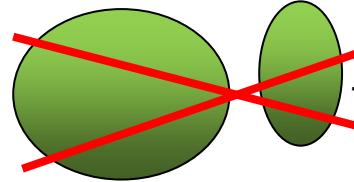
כאשר  $C$  – מסילה סגורה וחלקה למקוטעין עם כיוון האינטגרציה נגד השעון



( $C$  יכולה להיות איחוד של מספר סופי של קטעים חלקים  $D$  – תחום חסום קשיר ופשוט קשר



לא פשוט קשר



לא קשיר

תחום קשיר – ניתן לחבר בין כל 2 נקודות בתחום על ידי קו רציף כולו מוכל בתחום  
תחום פשוט קשר – כל מסילה סגורה בתחום מקיפה אך ורק נקודות בתחום

שימוש במשפט גרין לחישוב השטח

אם נציב  $F(x, y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$  או  $F(x, y) = x\hat{j}$  או  $F(x, y) = -y\hat{i}$  נקבל

$$-\oint_C y dx = \oint_C x dy = \frac{1}{2} \oint_C (-y dx + x dy) = \iint_D dx dy$$

תרגילים

12. חשב את האינטגרל  $\oint_C (e^x - y^3) dx + (\cos y + x^3) dy$  כאשר  $C: x^2 + y^2 = 1$

המכוונת נגד השעון

13. חשב את שטח האליפסה  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  תוך שימוש במשפט גרין ב-3 דרכים שונות

14. (מועד א 2011) חשבו את אינטגרל הקו  $\oint_L x^{99} y^{100} dx + x^{100} y^{99} dy$  לאורך המסילה הסגורה

הנתונה בצורה פרמטרית:  $L = \{x = \cos t, y = 2 + \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$

15. (מועד ב 2011) לאמת את משפט גרין לאינטגרל  $\oint_L (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$

כאשר  $L$  – מסלול סגור הנוצר על ידי העקומות  $x = y^2$  ו-  $y = x^2$  בכיוון נגד השעון

5. שדה משמר ופונקציית פוטנציאל

שדה (פונקציה) וקטורי  $F(x, y, z) = u(x, y, z)\hat{i} + v(x, y, z)\hat{j} + w(x, y, z)\hat{k}$  הוא שדה משמר בתחום אם ורק אם קיימת פונקציית פוטנציאל  $\varphi(x, y, z)$  כך ש-

$$\nabla\varphi(x, y, z) = \text{grad}\varphi(x, y, z) = F(x, y, z)$$

כלומר  $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u(x, y, z), \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v(x, y, z), \frac{\partial\varphi}{\partial z} = w(x, y, z)$  בכל נקודה בתחום

בדיקה של שדה משמר – אם  $\varphi(x, y, z)$  בעלת נגזרות רציפות מסדר 2 אז

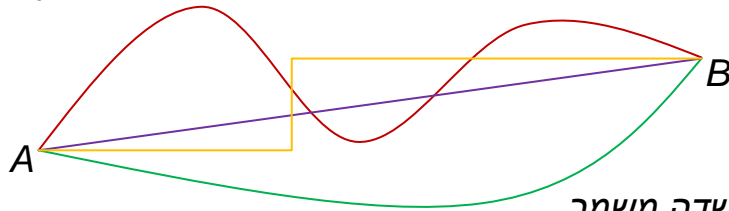
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

ולכן

המשפט היסודי של שדה משמר (אי תלות במסלול)

$$\int_C F(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$



כאשר  $F(x, y, z)$  - שדה משמר

$\varphi(x, y, z)$  - פונקציית הפוטנציאל המקיימת  $\text{grad}\varphi = F$

$C$  – מסילה חלקה למקוטעין בתחום בו השדה משמר

מסקנה – אם  $F(x, y, z)$  שדה משמר בתחום פשוט קשר המכול  $C$  - מסילה סגורה וחלקה

$$\oint_C F(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

תרגילים - חשב את האינטגרלים הבאים תוך שימוש במשפט היסודי של שדה משמר

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} yz dx + xz dy + (xy + 3z^2) dz \quad .17$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} e^x \sin y dx + e^x \cos y dy \quad .16$$

18. (מועד א 2011) בדקו כי השדה

$$\vec{F} = (2x \cos yz - ye^{-xy} + 2)\vec{i} - (x^2 z \sin yz + xe^{-xy} + 3)\vec{j} + (4 - yx^2 \sin yz)\vec{k}$$

הוא שדה משמר וחשבו את פוטנציאל שלו. מצאו את עבודתו של השדה לאורך המסילה

$$\vec{r} = \vec{i} \cos t + \vec{j} \sin t + 2t\vec{k}/\pi \quad (0 \leq t \leq \pi/2) \quad \text{המוגדרת ע"י}$$

19. (מועד ג 2011) מצא את העבודה של שדה הכוח

$$\vec{F} = (2x \cos(yz) - ye^{-xy} + 2) \cdot \vec{i} - (x^2 z \sin(yz) + xe^{-xy} + 3) \cdot \vec{j} + (4 - yx^2 \sin(yz)) \cdot \vec{k}$$

לאורך המסילות המחברות כל אחד משלושת הזוגות הנקודות הבאות בנפרד

$$B_3(0, \pi, 1/2) \leftarrow A_3(1, -\pi, 2), \quad B_2(1/2, \pi/2, 1) \leftarrow A_2(0, 1, -1), \quad B_1(1, \pi, 1) \leftarrow A_1(0, 0, 0)$$