חדו"א 2 שבוע 10
אינטגרל כפול

אינטגרל רגיל

$$y = f(x)$$

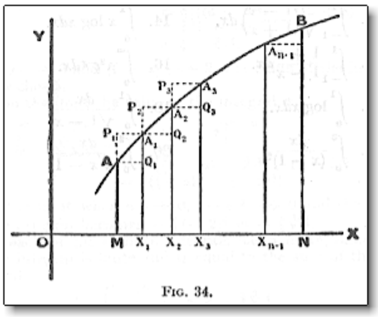
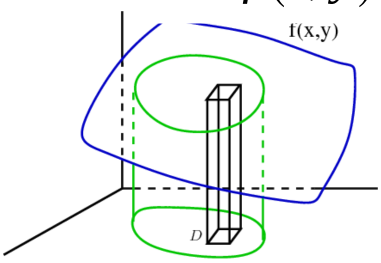


FIG. 34.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

אינטגרל כפול

$$z = f(x, y)$$



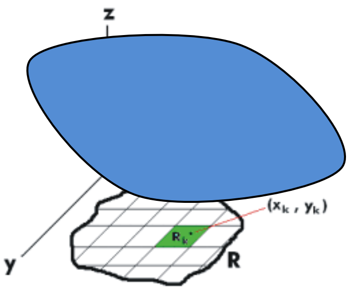
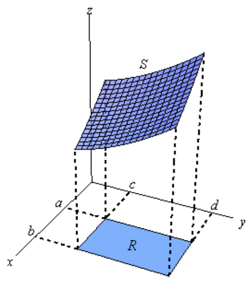


Fig. 1

$$\iint_{\mathbf{R}} f(x,y)dxdy = \lim_{\max(\Delta x_k, \Delta y_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta x_k \Delta y_k$$

1. חישוב האינטגרל בתחום מלבני



$$\iint_{\mathbf{R}} f(x,y)dxdy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

כאשר ב- $\int_a^b f(x,y)dx$ נוהגים ב- y כמו בקבוע

או

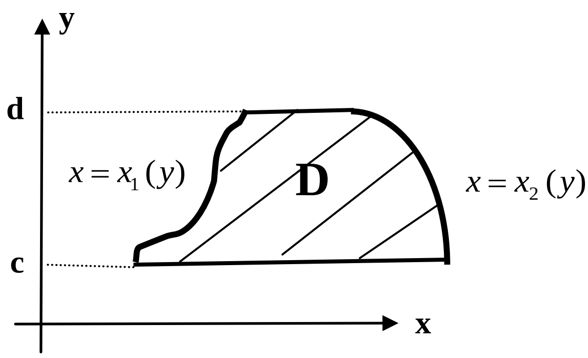
$$\iint_{\mathbf{R}} f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dx\right)dy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

כאשר ב- $\int_c^d f(x,y)dy$ נוהגים ב- x כמו בקבוע

תרגיל חשב את $\iint_D (x^2y + xy^2)\,dxdy,\ \ D:\{\,y=1,\ \ y=2,\ \ x=-1,\ \ x=1\}$

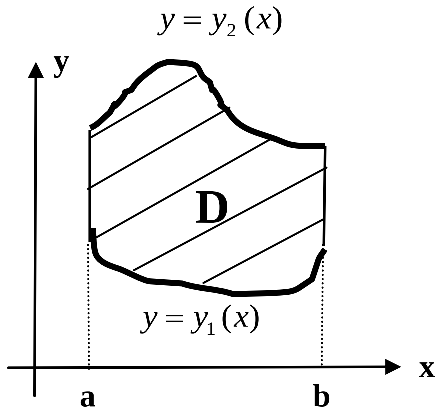
2. אינטגרל כפול והחלפת סדר האינטגרציה

תחום בסיסי לפי y



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

תחום בסיסי לפי x



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

תרגילים

חשב את האינטגרלים הכפולים הבאים בשתי שיטות
(על ידי החלפת סדר האינטגרציה) והשווה את התוצאות

1) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+6xy^2-y^3)\,dA,\ \ D:\{\,y=0,\ \ y=4,\ \ x=0,\ \ x=1\}$

2) $\iint\limits_D \dfrac{dA}{x^2y^3},\ \ D:\left\{\ y=\dfrac{1}{2}x,\ \ y=1,\ \ x=4\ \right\}$

3) $\iint\limits_D \dfrac{y}{x}\,dA,\ \ D:\left\{\ y=\dfrac{1}{2}x,\ \ y=2x,\ \ x=2,\ \ x=4\ \right\}$

4) $\iint\limits_D xy\,dA,\ \ D:\left\{\ y=\dfrac{1}{3}x,\ \ y=8-x,\ \ y=0\ \right\}$

5) $\iint\limits_D (x^2+2xy)\,dA,\ \ D:\{\,y=x^2,\ \ y=x+2\,\}$

6) $\iint\limits_D y^2\,dA,\ \ D:\{\,y=2\sqrt{x},\ \ y=-3\sqrt{x},\ \ x=1\}$

7) $\iint\limits_D \sqrt{x}\,dA,\ \ D:\{\,y=0,\ \ y=\sqrt{x},\ \ x=1\}$

8) $\iint\limits_D (x^2+y)\,dAy,\ \ D:\{\,y=x^2,\ \ y=\sqrt{x}\,\}$

9) $\iint\limits_D x^{\frac{3}{2}}\,dA,\ \ D:\left\{\ y=\sqrt{x},\ \ y=\dfrac{x}{2}\ \right\}$

10) $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,dA,\ \ D:\left\{\ y=-\dfrac{4}{x},\ \ y=x+5\ \right\}$; 11) $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}\,dA,\ \ D:\left\{\ y=x,\ \ y=\dfrac{1}{x},\ \ x=2\ \right\}$

חשב את השטח של צורה משורית D בשתי שיטות (על ידי החלפת סדר האינטגרציה) והשווה את התוצאות

12) $D:\{\ y=x^2,\ \ y=-2x\ \}$; 13) $D:\left\{\ y=\dfrac{6}{x},\ \ y=-3,\ \ x=-6\ \right\}$

14) $D:\{\ y^2=9x,\ \ x=4\ \}$; 15) $D:\left\{\ y=x^2,\ \ y=\dfrac{1}{2}x+5\ \right\}$

16) $D:\left\{\ y=-x^2,\ \ y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{3},\ \ y=0\ \right\}$; 17) $D:\left\{\ y=-\dfrac{3}{x},\ \ y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2},\ \ x=-3\ \right\}$

18) $D:\{\ y=\sqrt{x},\ \ y=x-6,\ \ x=0\ \}$; 19) $D:\left\{\ y=-2\sqrt{x},\ \ y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{7}{3},\ \ y=0\ \right\}$

20) $D:\left\{\ y=\dfrac{6}{x},\ \ y=x+1,\ \ y=2x-4\ \right\}$; 21) $D:\{\ y=x^2,\ \ y=-x+6,\ \ y=-2,\ \ x=0\ \}$

22) $D:\left\{\ y=x^2,\ \ y=\dfrac{8}{x},\ \ y=0,\ \ x=8\ \right\}$

23) $D:\left\{\ y=3x,\ \ y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{8}{3},\ \ y=-2x+19,\ \ y=-3\ \right\}$

24) $D:\left\{\ y^2=4x,\ \ y=-x+8,\ \ y=\dfrac{2}{7}x-\dfrac{16}{7}\ \right\}$; 25) $D:\{\ y=-\sqrt{x},\ \ y=x,\ \ y=-x+2\ \}$

החלף את סדר האינטגרציה באינטגרלים הכפולים הבאים

26) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy$; 27) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{\frac{(x-1)^2}{2}}^{1-x} f(x,y)\,dy$; 28) $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_{-3}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$

29) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{4x-x^2} f(x,y)\,dy$; 30) $\int\limits_2^6 dx \int\limits_{\frac{6}{x}}^{3} f(x,y)\,dy$; 31) $\int\limits_{-5}^{-1} dx \int\limits_{-\frac{5}{x}}^{x+6} f(x,y)\,dy$; 32) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$

33) $\int\limits_0^9 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$; 34) $\int\limits_{-3}^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy$; 35) $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-x-2} f(x,y)\,dy$

36) $\int\limits_{-3}^0 dx \int\limits_{-2}^{2x+4} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^6 dx \int\limits_{-2}^{-x+4} f(x,y)\,dy$; 37) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{-2x+8} f(x,y)\,dy$;

38) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$; 39) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{4}{x}}^{4} f(x,y)\,dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_x^4 f(x,y)\,dy$

40) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{-x+2} f(x,y)\,dy$

תשובות

1) 9; 2) $\frac{5}{96}\approx 0.05$; 3) $\frac{45}{4}=11.25$; 4) $\frac{80}{3}\approx 26.67$; 5) $\frac{72}{5}=14.4$; 6) $\frac{14}{3}\approx 4.67$

7) $\frac{1}{2}=0.5$; 8) $\frac{33}{140}\approx 0.24$; 9) $\frac{64}{21}\approx 3.08$; 10) $-\frac{136}{21}\approx -6.48$; 11) $\frac{9}{4}=2.25$

12) $S=\frac{4}{3}\approx 1.33$; 13) $S=12-6\ln 3\approx 5.41$; 14) $S=32$; 15) $S=\frac{243}{16}\approx 15.19$

16) $S=\frac{11}{6}\approx 1.83$; 17) $S=7-3\ln 3\approx 3.70$; 18) $S=\frac{63}{2}=31.5$; 19) $S=\frac{22}{3}\approx 7.33$

20) $S=\frac{11}{2}-6\ln\left(\frac{3}{2}\right)\approx 3.07$; 21) $S=\frac{74}{3}\approx 24.67$; 22) $S=\frac{8}{3}+8\ln 4\approx 13.76$

23) $S=64$; 24) $S=27$; 25) $S=\frac{13}{3}\approx 4.33$

26) $\int_0^2 dy\int_{2y}^4 f(x,y)\,dx$; 27) $\int_0^2 dy\int_{1-\sqrt{2y}}^{1-y} f(x,y)\,dx$; 28) $\int_{-3}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx$

29) $\int_0^4 dy\int_{2-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$; 30) $\int_1^3 dy\int_{\frac{6}{y}}^{6} f(x,y)\,dx$; 31) $\int_1^5 dy\int_{y-6}^{-\frac{5}{y}} f(x,y)\,dx$;

32) $\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$; 33) $\int_{-3}^3 dy\int_{y^2}^{9} f(x,y)\,dx$; 34) $\int_0^3 dy\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx$

35) $\int_{-2}^0 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-y-2} f(x,y)\,dx$; 36) $\int_{-2}^4 dy\int_{\frac{1}{2}y-2}^{-y+4} f(x,y)\,dx$; 37) $\int_0^4 dy\int_{\sqrt{y}}^{-\frac{1}{2}y+4} f(x,y)\,dx$

38) $\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx$; 39) $\int_2^4 dy\int_{\frac{4}{y}}^{y} f(x,y)\,dx$; 40) $\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{-y+2} f(x,y)\,dx$

3. החלפת משתנים באינטגרל כפול

החלפת משתנה באינטגרל רגיל $\int_a^b f(x)dx = [x=u(t), t=u^{-1}(x)] = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\left(\frac{dx}{dt}\right)dt$

דוגמא 1

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x=\sin t,\ t(0)=0,\ t(1)=\frac{\pi}{2} \\ \frac{dx}{dt}=\cos t dt \end{array}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

החלפת משתנה באינטגרל כפול

$$\iint_R f(x,y)dS = \iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))J(u,v)dudv$$

כאשר $J(u,v)=\left|\det\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}\right|$ נקרא יעקוביאן

משפט

עבור $x(u,v), y(u,v)$ נגדיר $J(u,v)=\left|\det\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}\right|$ ו- $J(x,y)=\left|\det\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}\right|$

אזי $J(x,y)\cdot J(u,v)=1$

דוגמא 2 – חשב את $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dA$ כאשר $D=\{1\le x+y\le 2, x\ge 0, y\ge 0\}$

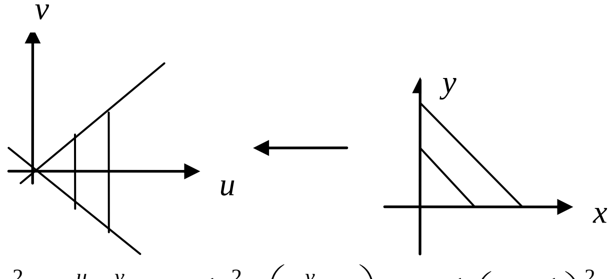
החלפת המשתנים $u=x+y, v=x-y \Rightarrow x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$

$$\left|\det\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = 2 \quad \text{ו-} \quad \left|\det\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}$$

תחום האינטגרציה בקואורדינאטות החדשות

$$1\le x+y\le 2 \Rightarrow 1\le u\le 2$$

$$x=0\Rightarrow v=-u,\quad \mathrm{y}=0\Rightarrow v=u$$



$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dS = \frac{1}{2}\int_1^2 du\int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}dv = \frac{1}{2}\int_1^2 u\left(e^{\frac{v}{u}}\Big|_{-u}^{u}\right)du = \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\int_1^2 udu = \frac{3}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

דוגמא 3 – חשב את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

החלפת המשתנים $x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi \Leftarrow r=1$ **המעגל**

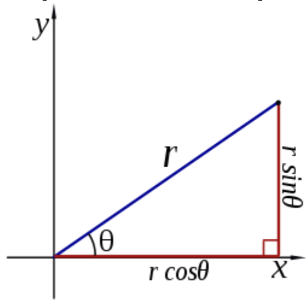
היעקוביאן $\begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix}=abr\cos^2\varphi+abr\sin^2\varphi=abr$.

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 abrdr=ab\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^1\right)d\varphi=\frac{ab}{2}2\pi=ab\pi$$

דוגמא 4 (בחינה 2014 מועד א') - **חשב את** $\iint_D\sqrt{\left|\frac{y}{x}\right|}dA$ **כאשר** $D=\left\{\frac{1}{x}\le y\le\frac{2}{x}, 3x\le y\le 5x\right\}$

רמז - החלפת המשתנים $u=\frac{y}{x}, v=xy$

4. אינטגרל כפול בקואורדינטות קוטביות



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}\quad \begin{cases} r\ge 0 \\ 0\le\theta<2\pi \end{cases}$$

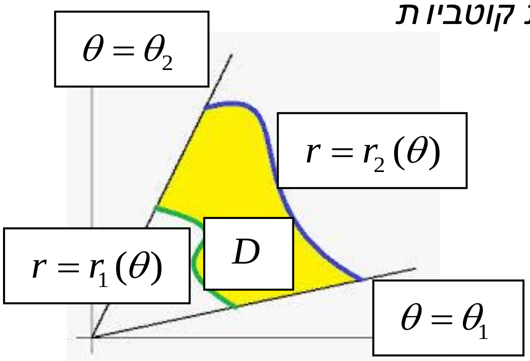
$$\begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=$$

$$r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

$$\iint_D f(x,y)dS=\iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

כאשר Δ **מהווה תחום** D **המתואר בקואורדינטות קוטביות**

תחום בסיסי בקואורדינטות קוטביות



$$\iint_D f(x,y)dS=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

תרגילים

1) חשב את $\iint\limits_D (x^2+y^2)dA$ כאשר $D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le 2x\}$

$$x^2+y^2=2x \Rightarrow r^2=2r\cos\theta \Rightarrow r=2\cos\theta$$

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ לכן $\Delta=\left\{(r,\theta)\middle|-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\le r\le 2\cos\theta\right\}$

$$\iint\limits_R (x^2+y^2)dxdy == \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{r^4}{4})\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{1}{4}\cdot 2^4\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta\right)^2 d\theta =$$

$$4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)d\theta =$$

$$=\left(\theta+\sin 2\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 2\theta\right)d\theta = \pi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta = \pi+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{4}\sin 4\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi$$

2) חשב את $\iint\limits_D (x^2+y^2)dA$ כאשר $D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le 2x\}$

3) חשב את $\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dA$ כאשר $D=\{(x,y)|\ 0\le y\le x, x^2+y^2\le 4\}$ (תשובה $\frac{\pi\ln 5}{16}$)

4) חשב את $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dydx$ (תשובה $\frac{\pi}{8}$)

5) חשב את $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dydx$ (תשובה $\frac{16}{9}$)

6) חשב את $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dydx}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ (תשובה $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$)

7) חשב את $\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ (תשובה $\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$)

5. אינטגרל משולש

אינטגרל רגיל

$$\boxed{y=f\left(x\right)}$$

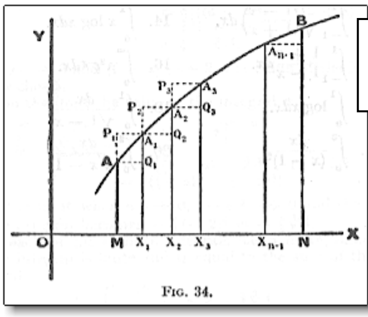
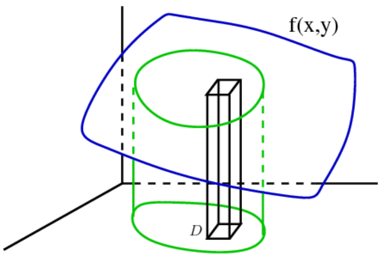


FIG. 34.

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\lim_{\max \Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\Delta x_k$$

אינטגרל כפול

$$\boxed{z=f\left(x,y\right)}$$



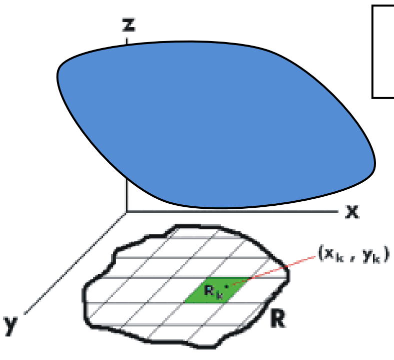
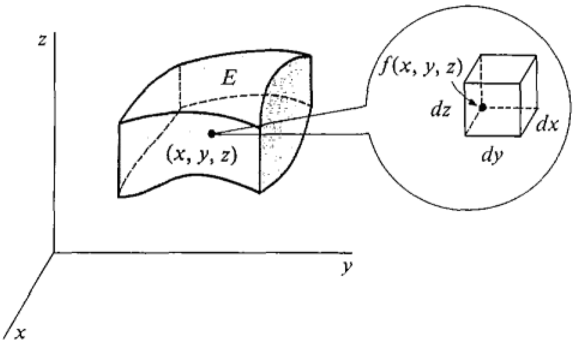


Fig. 1

$$\iint_{\mathbf{R}} f\left(x,y\right)dxdy=\lim_{\max\left(\Delta x_k,\Delta y_k\right)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k,y_k\right)\Delta x_k\Delta y_k$$

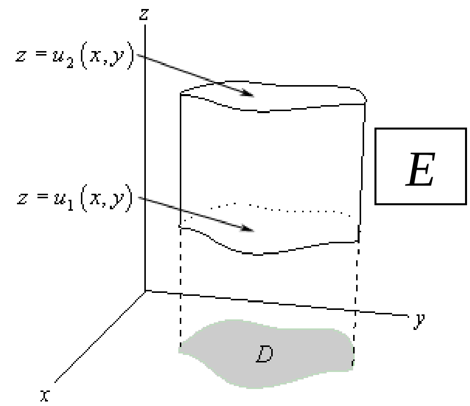
אינטגרל משולש

$$\boxed{u=f\left(x,y,z\right)}$$

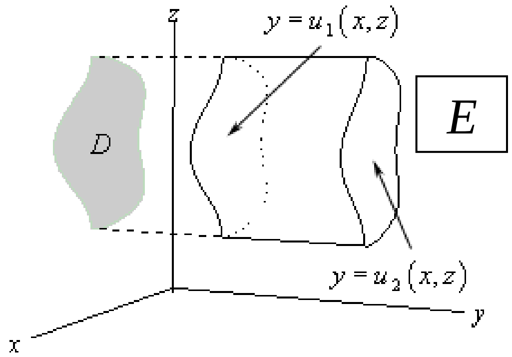


$$\iiint_E f\left(x,y,z\right)dxdydz=\lim_{\max\left(\Delta x_k,\Delta y_k,\Delta z_k\right)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k,y_k,z_k\right)\Delta x_k\Delta y_k\Delta z_k$$

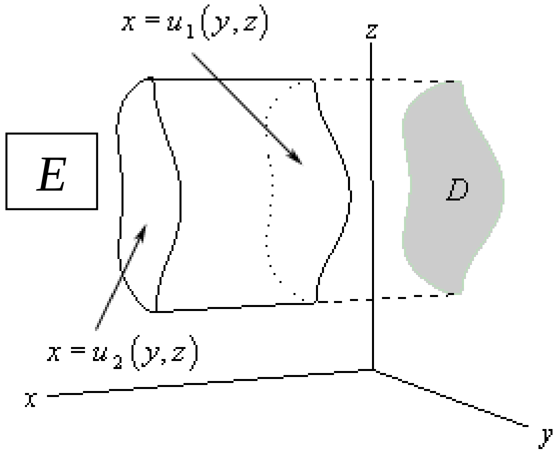
חישוב האינטגרל המשולש בתחומים בסיסיים



$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz=\iint_D f(x,y,z)dxdy\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)}dz$$



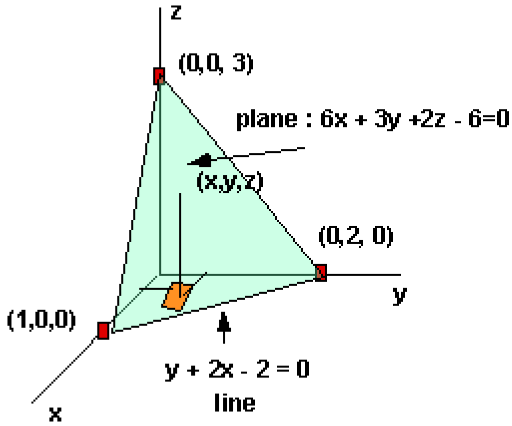
$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz=\iint_D f(x,y,z)dxdz\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)}dy$$



$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz=\iint_D f(x,y,z)dydz\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)}dx$$

תרגילים – חשב את

1) האינטגרל $\iiint\limits_G xdxdydz$ בשלוש צורות השונות עפ"י סדר האינטגרציה בתחום



תשובה

$$\int_0^1 dx \int_0^{-2x+2} dy \int_0^{-3x-1.5y+3} zdz = \int_0^1 dx \int_0^{-2x+2} dy \int_0^{-3x-1.5y+3} zdz = \int_0^1 dx \int_0^{-2x+2} dy \int_0^{-3x-1.5y+3} zdz$$

2) האינטגרל $\iiint\limits_G zdxdydz$ כאשר G הוא חלק מהגליל $y^2+z^2 \le 1$ הנמצא בתומן הראשון ($x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$) וחסום בין המישורים $x=0$ ו- $y=x$

3) נפח הגוף החסום על ידי המשטח $y=x^2$ ועל ידי המישורים $y+z=4$ ו- $z=0$ (תשובה $\frac{256}{15}$)

4) נפח הגוף הכלוא בגליל האליפטי $x^2+9y^2=9$ בין המישורים $z=x+4$ ו- $z=0$ (תשובה 9π)

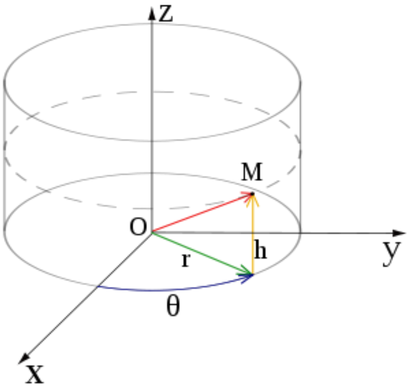
5) נפח הגוף הכלוא בין הגליל הפרבולי $z=4-3y^2$ לבין הפרבולויד $z=4x^2+y^2$ (תשובה 2π)

6) נפח הגוף החסום על ידי המשטח $z=\sqrt{y}$ ועל ידי המישורים $z=0, z=0, x+y=1$

7) נפח הטריז בתומן הראשון, שחותכים המישורים $y=x$ ו- $x=0$ מהגליל $y^2+z^2 \le 1$

8) נפח הגוף הכלוא בין הגלילים $x^2+y^2=1$ ו- $x^2+z^2=1$

6. קואורדינאטות גליליות



$$(x,y,z)\to(z,r,\theta)$$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad \begin{cases} r\ge 0 \\ 0\le\theta<2\pi \\ z\in\mathbf{R} \end{cases}$$

$$x^2+y^2=r^2$$

$$\begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_z \\ y'_r & y'_\theta & y'_z \\ z'_r & z'_\theta & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

תרגילים – מצא את

1) (תשע"א סמסטר ב מועד א') מסת הגוף החסום ע"י המשטחים $x^2+y^2=4$ ו- $z=1+x^2+y^2$ שבתחום $\{x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$. צפיפות של החומר $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2$
(מומלץ לשרטט סקיצה של הגוף)

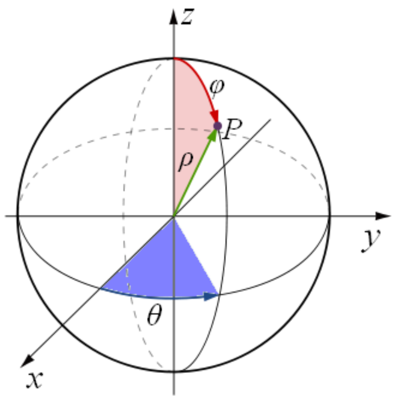
2) (תשע"א סמסטר ב מועד ב') מסת ה גוף חסום על ידי המשטחים $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=3z$, $x=0$ ו- $y=0$ בתנאים $y\le 0$, $x\le 0$, $x^2+y^2\le 3z$.
צפיפות החומר $\gamma=1$

3) נפח הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=4$ וחסום על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=9$

4) נפח הגוף הכלוא בין המשטחים $z=x^2+y^2$ ו- $x^2+y^2+z^2=20$ (תשובה $\frac{8\pi}{3}(10\sqrt{5}-19)$)

5) נפח הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=4x$ וחסום על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$
(תשובה $\frac{32}{9}(3\pi-4)$)

7. קואורדינאטות כדוריות



$$(x,y,z)\to(\rho,\theta,\varphi)$$

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho\ge 0 \\ 0\le\theta<2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2$$

$$\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix}=\rho^2\sin\varphi$$

תרגילים

1) תאר את המשטחים הבאים: $\rho=3,\theta=\frac{\pi}{4},\varphi=\frac{\pi}{4}$

2) פרט את האינטגרל $\iiint_G xyzdxdydz$ בקואורדינטות קרטזיות , גליליות וכדוריות ו חשב אותו באחת הצורות כאשר תחום האינטגרציה G חסום על ידי המשטחים
א) $x^2+y^2+z^2\le 4$, ב) $x^2+y^2+z^2\le 4, x\ge 0$, ג) $x^2+y^2+z^2\le 4, x\le 0, z\le 0$

3) חשב את האינטגרל $\iiint_G xyzdxdydz$ בקואורדינטות כדוריות כאשר תחום האינטגרציה G חסום על ידי המשטחים
א) $x^2+y^2+z^2\le 4,\ z^2\le x^2+y^2$, ב) $x^2+y^2+z^2\le 4,\ z\ge\sqrt{3x^2+3y^2}, y\ge 0$

4) חשב את נפח הגוף בתומן הראשון החסום על ידי פני הכדור $\rho=2$, מישורי הצירים והחרוטים $\varphi=\frac{\pi}{6}$ ו- $\varphi=\frac{\pi}{3}$ (תאר את המשטחים בקואורדינטות קרטזיות) (תשובה $\frac{2}{3}(\sqrt{3}-1)$)

5) חשב את נפח חלק הכדור $x^2+y^2+z^2\le 9$ הנמצא מחוץ לחרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ומעל המישור $z=0$ (תשובה $9\sqrt{2}\pi$)