חדו"א 2 שיעור 9 חלק 1

פולינום טיילור / מקלורן של פונקציה במספר משתנים

משפט 1

אם $f(x)$ גזירה $n+1$ פעמים בסביבת נקודה x_0 אז $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

כאשר $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ - פולינום טיילור

$R_n(x)=o\left[(x-x_0)^n\right]=\frac{f^{(k)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ - שארית הפולינום

($\lim_{x\to x_0}\frac{o\left[(x-x_0)^n\right]}{(x-x_0)^n}$ ו- c היא נקודה בין x_0 ל- x)

במקרה של $x_0=0$

כאשר $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ - פולינום מקלורן

$R_n(x)=o\left[x^n\right]=\frac{f^{(k)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ - שארית הפולינום

($\lim_{x\to x_0}\frac{o\left[x^n\right]}{x^n}$ ו- c היא נקודה בין 0 ל- x)

נציג את פולינום טיילור בצורה הבאה

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k f(x_0)}{dx^k}(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left[\frac{d}{dx}(x-x_0)\right]^k f(x_0)$$

משפט 2

אם $f(\mathbf{r})$ בעלת כל הנגזרות החלקיות מסדר עד $n+1$ כולל בסביבת נקודה $\mathbf{r}_0$ אז

$$f(\mathbf{r})=P_n(\mathbf{r})+R_n(\mathbf{r})$$

כאשר $P_n(\mathbf{r})=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left[\nabla(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right]^k f(\mathbf{r}_0)$ - פולינום טיילור

$R_n(x)=o\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^n\right)$ - שארית הפולינום ($\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\frac{o\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^n\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^n}$)

במקרה של $\mathbf{r}_0=\mathbf{0}$ נקבל $P_n(\mathbf{r})=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left[\nabla\mathbf{r}\right]^k f(\mathbf{0})$ - פולינום מקלורן

ו- $R_n(\mathbf{r})=o\left(|\mathbf{r}|^n\right)$ - שארית הפולינום ($\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{0}}\frac{o\left(|\mathbf{r}|^n\right)}{|\mathbf{r}|^n}$)

תרגיל 1

רשום את פולינום מקלורן מסדר 3 עבור פונקציה $f(x,y)$

פתרון

$$P_3(x,y)=\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)(x,y)\right]^k f\left(0,0\right)=$$

$$\frac{1}{0!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)(x,y)\right]^0 f\left(0,0\right)+\frac{1}{1!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)(x,y)\right]^1 f\left(0,0\right)+$$

$$\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)(x,y)\right]^2 f\left(0,0\right)+\frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)(x,y)\right]^3 f\left(0,0\right)=$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y\right)^0 f\left(0,0\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y\right)^1 f\left(0,0\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y\right)^2 f\left(0,0\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y\right)^3 f\left(0,0\right)=$$

$$f\left(0,0\right)+\frac{\partial f\left(0,0\right)}{\partial x}x+\frac{\partial f\left(0,0\right)}{\partial y}y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f\left(0,0\right)}{\partial x^2}x^2+2\frac{\partial^2 f\left(0,0\right)}{\partial x\partial y}xy+\frac{\partial^2 f\left(0,0\right)}{\partial y^2}y^2\right)+$$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 f\left(0,0\right)}{\partial x^3}x^3+3\frac{\partial^3 f\left(0,0\right)}{\partial x^2\partial y}x^2y+3\frac{\partial^3 f\left(0,0\right)}{\partial x\partial y^2}xy^2+\frac{\partial^3 f\left(0,0\right)}{\partial y^3}y^3\right)$$

תרגיל 2

רשום את פולינום טיילור מסדר 2 עבור פונקציה $f(x,y,z)$ בסביבה של נקודה $(1,-1,2)$

פתרון

$$P_2(x,y)=\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{k!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)(x-1,y+1,z-2)\right]^k f(1,-1,2)=$$

$$\frac{1}{0!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)(x-1,y+1,z-2)\right]^0 f(1,-1,2)+$$

$$\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)(x-1,y+1,z-2)\right]^1 f(1,-1,2)+$$

$$\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)(x-1,y+1,z-2)\right]^2 f(1,-1,2)=$$

$$f(1,-1,2)+\frac{\partial f(1,-1,2)}{\partial x}(x-1)+\frac{\partial f(1,-1,2)}{\partial y}(y+1)+\frac{\partial f(1,-1,2)}{\partial z}(z-2)$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(1,-1,2)}{\partial x^2}(x-1)^2+\frac{\partial^2 f(1,-1,2)}{\partial y^2}(y+1)^2+\frac{\partial^2 f(1,-1,2)}{\partial x^2}(z-2)^2\right]$$

$$+\frac{\partial^2 f(1,-1,2)}{\partial x\partial y}(x-1)(y+1)+\frac{\partial^2 f(1,-1,2)}{\partial x\partial z}(x-1)(z-2)+$$

$$\frac{\partial^2 f(1,-1,2)}{\partial y\partial z}(y+1)(z-2)$$