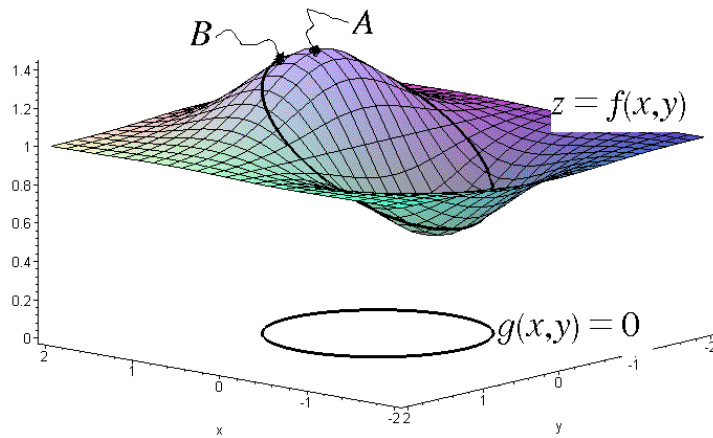
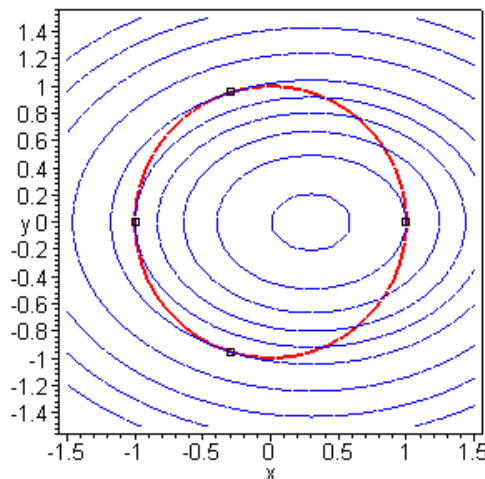


נקודות קיצון של פונקציה $z = f(x, y)$ כפוף לאילוץ $g(x, y)$ (שיטת כופלי לגרנז')



נקודה A היא נקודת מקסימום של פונקציה $z = f(x, y)$ (לא רלוונטית) נקודה B היא נקודת מקסימום של פונקציה $z = f(x, y)$ כפוף לאילוץ $g(x, y) = 0$ (אותה רוצים למצוא !)

הסבר גיאומטרי



קווים כחולים הם קווי גובה של הפונקציה $z = f(x, y)$

קו אדום הוא קו האילוץ $g(x, y) = 0$

ניתן לראות כי בנקודות החשודות לקיצון כפוף לאילוץ (המודגשות) $\nabla f(x, y)$ מקביל ל- $\nabla g(x, y)$ ובמקרה הכללי כאשר $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$ את התנאי נהוג להציג בצורה

$$\nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) = \nabla (f(x, y) + \lambda g(x, y)) = \mathbf{0}$$

פונקציה חדשה $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ (נקראת פונקצית לגרנז')

מאפשרת להציג את התנאי בצורה $\nabla L(x, y, \lambda) = \mathbf{0}$ או בצורה מפורטת

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

למקדם λ קוראים כופל לגרנז'

תרגילים נתונות פונקצית מטרה $f(x, y)$ ומשוואות האילוץ

מצא את הנקודות הקיצון בשיטת כופלי לגרנז' וחשב את ערכי פונקצית מטרה בנקודות אלה

- 1) $f(x, y) = 3x^2 - 6xy - 4y^2 + 3x - 10, x - 2y - 2 = 0$
- 2) $f(x, y) = 6x^2 + 5xy - 3y^2 - 5x + y + 2, y = 3x - 2$
- 3) $f(x, y) = 8x + 9y + 4, 2x^2 - 8xy - 7y^2 - 4x - 2y + 10 = 0$
- 4) $f(x, y) = 3x - 4y + 10, 7xy - 3x + 9y + 3 = 0$
- 5) $f(x, y) = -x^2 - xy - y^2 - 3x + 5, 3x^2 + 3xy + 3y^2 + 4x - 5y - 12 = 0$
- 6) $f(x, y) = 2xy - 2y^2 + 4x + 10y - 5, -xy + y^2 = x + 4y - 3$
- 7) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

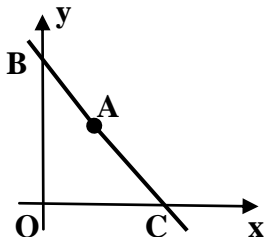
המרחק בין שתי הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הוא $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

על הישרים הבאים מצא את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה A הנתונה וחשב את המרחק מהנקודה אל הישר

- 10) $x + 2y - 9 = 0, A(-10, 2)$
- 11) $2x - 7y + 12 = 0, A(-1, 9)$

על המעגלים הבאים מצא את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה A הנתונה וחשב את המרחק מהנקודה אל המעגל

- 12) $x^2 + y^2 = 18, A(-5, -5)$
- 13) $x^2 + y^2 - 6x - 1 = 0, A(-3, 2)$
- 14) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0, A(8, 0)$



נקודה A נמצאת ברביע ראשון. הישר שעובר דרך הנקודה A חותך את צירי המערכת בנקודות B ו- C . מצא את המשוואה של הישר כך שהמרחק בין הנקודות B ו- C יהיה מינימאלי ואת האורך המינימאלי של הקטע BC אם

- 15) $A(3, 3)$
- 16) $A(1, 8)$

המרחק מהנקודה $A(x_1, y_1)$ אל הישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

על העקומות הבאות מצא את הנקודה הקרובה ביותר לישר הנתון L ואת המרחק המינימאלי העקומה אל הישר

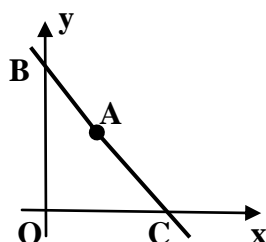
- 17) $9y^2 + 4x + 4y + 9 = 0, L: x + y - 7 = 0$
- 18) $-9x^2 - 6xy - y^2 + 3x + 3y - 1 = 0, L: y = 3x - 10$

על העקומות הבאות מצא את הנקודות הקרובה והרחוקה ביותר לישר הנתון L ואת המרחקים המינימאלי והמקסימאלי מהעקומה אל הישר

19) $x^2 + xy + y^2 + 7x + 4y + 8 = 0, 3x + 4y - 17 = 0$

20) $2x^2 - 4xy + 6y^2 + 5x + 2y = 0, y = \frac{5}{12}x + \frac{13}{6}$

נקודה A נמצאת ברביע ראשון. הישר שעובר דרך הנקודה A חותך את צירי המערכת בנקודות B ו- C . מצא את המשוואה של הישר כך שטח המשולש ABC יהיה מינימאלי ואת השטח המינימאלי



21) $A(1, 3)$

22) $A(5, 2)$

תשובות

1) $M\left(\frac{13}{2}, \frac{9}{4}\right), f(M) = \frac{113}{4} = 28.25; 2) M(2, 4), f(M) = 12;$

3) $M_1(1, -2), f(M_1) = -6, M_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right), f(M_2) = \frac{40}{3} \approx 13.33;$

4) $M_1\left(-\frac{17}{7}, \frac{9}{7}\right), f(M_1) = -\frac{17}{7} \approx -2.43, M_2\left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}\right), f(M_2) = \frac{79}{7} \approx 11.29;$

5) $M_1(0, 3), f(M_1) = -4, M_2\left(\frac{1}{9}, -\frac{26}{9}\right), f(M_2) = -\frac{91}{27} \approx -3.37;$

6) $M_1(0, 1), f(M_1) = 3, M_2(-12, -3), f(M_2) = -29;$

7) $M_1(\sqrt{2}, \sqrt{2}), f(M_1) = \sqrt{2} \approx 1.41, M_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), f(M_2) = -\sqrt{2} \approx -1.41;$

8) $f_{\min} = f\left(-\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -3, f_{\max} = f\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3;$

9) $f_{\min} = f(-2, 2) = f(2, -2) = -4, f_{\max} = f(2, 2) = f(-2, -2) = 4;$

10) $M(-7, 8), f_{\min} = \sqrt{45} \approx 6.71; 11) M(1, 2), f_{\min} = \sqrt{53} \approx 7.28;$

12) $f_{\min} = f(-3, -3) = \sqrt{8} \approx 2.83, f_{\max} = f(3, 3) = \sqrt{128} \approx 11.33;$

13) $f_{\min} = f(0, 1) = \sqrt{10} \approx 3.16, f_{\max} = f(6, -1) = \sqrt{90} \approx 9.49;$

14) $f_{\min} = f(4, 2) = \sqrt{20} \approx 4.47, f_{\max} = f(0, 4) = \sqrt{80} \approx 8.94;$

15) $y = -x + 6, f_{\min} = f(-1, 6) = \sqrt{72} \approx 8.49;$

16) $y = -2x + 10, f_{\min} = f(-2, 10) = \sqrt{125} \approx 11.18;$

17) $f_{\min} = f\left(-\frac{9}{4}, 0\right) = \frac{37}{4\sqrt{2}} \approx 6.54; 18) f_{\min} = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) = \frac{10}{\sqrt{10}} \approx 3.16;$

19) $f_{\min} = f\left(-\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{59}{15} \approx 3.93, f_{\max} = f(-4, -2) = \frac{37}{5} = 7.4;$

20) $f_{\min} = f\left(-\frac{5}{2}, 0\right) = \frac{27}{26} \approx 1.04, f_{\max} = f\left(-\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\right) = \frac{153}{52} \approx 2.94;$

21) $y = -3x + 6, f_{\min} = f(-3, 6) = 6; 22) y = -\frac{2}{5}x + 4, f_{\min} = f\left(-\frac{2}{5}, 4\right) = 20;$

נקודות קיצון מוחלט של פונקציה $z = f(x, y)$

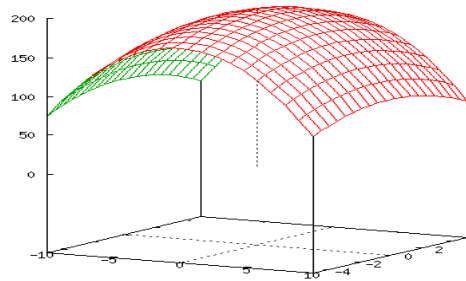
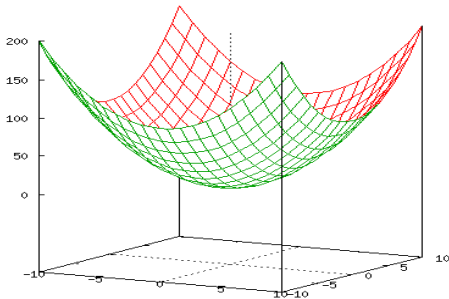
נקודות החשודות לקיצון מוחלט של פונקציה רציפה $y = f(x)$ בקטע סגור

- נקודות פנימיות בהן $f'(x) = 0$ או לא מוגדרת
- קצוות הקטע

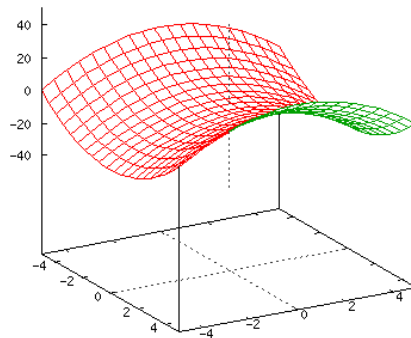
נקודות החשודות לקיצון מוחלט של פונקציה רציפה $z = f(x, y)$ בתחום סופי

סגור עם קווי שפה הישרים המקבילים לצירים

- נקודות פנימיות בהן $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ או לא מוגדר
 - נקודות פינתיות (קדקודים)
 - נקודות שפה בהם $f'_x(x, C) = 0$ או $f'_y(C, y) = 0$ בהתאמה
- דוגמאות למשטחי פונקציות עם קיצון מוחלט בנקודות פינתיות ופנימיות



דוגמא למשטח פונקציה עם קיצון מוחלט בנקודות שפה כלליות



תרגילים מצא את המקסימום ואת המינימום המוחלטים של הפונקציה $z = f(x, y)$ בתוך המלבן ABCD שצלעותיו מקבילות לצירי המערכת

- 1) $z(x, y) = -3x^2 - xy - 6y^2 - 5x + 11y$, $A(-2, 2)$, $B(0, 2)$, $C(0, 0)$, $D(-2, 0)$
- 2) $z(x, y) = 4x^3 - 6x^2 - 6xy + y^2 + 6x + 4y - 2$, $A(-3, 2)$, $B(3, 2)$, $C(3, -1)$, $D(-3, -1)$
- 3) $z(x, y) = -2x^2 - 2xy - 7y^3 - 4y^2 - 4x - 2y + 1$, $A(-2, 2)$, $B(4, 2)$, $C(4, -2)$, $D(-2, -2)$
- 4) $z(x, y) = e^{-3x} (x^2 - 2xy - 2y^2 - 5x + 14y - 3)$, $A(-2, 4)$, $B(-1, 4)$, $C(-1, 0)$, $D(-2, 0)$
- 5) $z(x, y) = e^{-3y} (-2x^2 - xy + y^2 + 10x + 13y + 6)$, $A(2, -1)$, $B(4, -1)$, $C(4, -3)$, $D(2, -3)$
- 6) $z(x, y) = e^{2x-2y} (-5x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 4)$, $A(-1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, -1)$, $D(-1, -1)$

נקודות החשודות לקיצון מוחלט של פונקציה רציפה $z = f(x, y)$ בתחום סופי

סגור עם קווי שפה בצורת פונקציות מפורשות $y = g(x)$ או $x = h(y)$

• נקודות פנימיות בהן $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ או לא מוגדר

• נקודות פינתיות (קדקודים)

• נקודות שפה בהם $\frac{d}{dx} f(x, g(x)) = 0$ או $\frac{d}{dy} f(h(y), y) = 0$ בהתאמה

תרגילים מצא את המקסימום ואת המינימום המוחלטים של הפונקציה $z = f(x, y)$ בתוך

המשולש ABC

7) $z(x, y) = 5x^2 + 2xy + y^2 - 12x + 4y - 8$, $A(0, -6)$, $B(0, 4)$, $C(5, -6)$

8) $z(x, y) = x^2 + 3xy - y^2 + 13x - 3$, $A(-4, 2)$, $B(1, 2)$, $C(1, -3)$

9) $z(x, y) = 2x^2 - 3xy + 3y^2 - 12x - 6y - 8$, $A(-2, -2)$, $B(0, 2)$, $C(6, 2)$

מצא את המקסימום ואת המינימום המוחלטים של הפונקציה $z = f(x, y)$ בתוך המשולש כאשר

נתונות משוואות הישרים המכילים את צלעות המשולש

10) $z(x, y) = -7x^2 - 4xy - 3y^2 - 6x + 8y + 4$, $y = 2x + 6$, $y = -\frac{1}{3}x - 1$, $x = 0$

11) $z(x, y) = x^3 + 2x^2 + 2xy + y^2 - 11x + 10y - 8$, $y = 1$, $y = x - 1$, $y = -2x - 7$

12) $z(x, y) = e^{-x}(2xy - y^2 + 2x - 7)$, $y = 0$, $x = 0$, $3x - y - 6 = 0$

נקודות החשודות לקיצון מוחלט של פונקציה רציפה $z = f(x, y)$ בתחום סופי

סגור עם קווי שפה בצורת פונקציות סתומות $g(x, y) = 0$

• נקודות פנימיות בהן $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ או לא מוגדר

• נקודות פינתיות (קדקודים)

• נקודות שפה בשיטת כופלי לגרנג' כאשר $g(x, y) = 0$ מהווה אילוץ

תרגילים 13) מצא את המקסימום ואת המינימום המוחלטים של הפונקציה $z = f(x, y) = x + y$

בתוך האליפסה $2x^2 + 7y^2 = 14$

14) מצא את המקסימום ואת המינימום המוחלטים של הפונקציה $z = f(x, y) = xy$ בתוך

המעגל $x^2 + y^2 = 8$

1) $z_{\max} = z(-1, 1) = 8$, $z_{\min} = z(-2, 0) = -2$

תשובות

2) $z_{\max} = z(3, -1) = 85$, $z_{\min} = z(-3, -1) = -203$

3) $z_{\max} = z(0, -2) = 45$, $z_{\min} = z(4, 2) = -139$

4) $z_{\max} = z(-2, 4) = 20574.87$, $z_{\min} = z(-1, 0) = 60.26$

5) $z_{\max} = z(3, -2) = 806.86$, $z_{\min} = z(4, -3) = -32412.34$

6) $z_{\max} = z(1, 0) = 22.17$, $z_{\min} = z(3, -1) = -113276.40$

7) $z_{\max} = z(0, 4) = 24$, $z_{\min} = z(2, -4) = -28$

8) $z_{\max} = z(1, 1.5) = 13.25$, $z_{\min} = z(-4, 2) = -67$

9) $z_{\max} = z(-2, -2) = 36$, $z_{\min} = z(4.5, 2) = -48.5$

10) $z_{\max} = z(-1, 2) = 15$, $z_{\min} = z(0, 6) = -56$

11) $z_{\max} = z(-2.52, 1) = 22.38$, $z_{\min} = z(0.44, -0.56) = -18.15$

12) $z_{\max} = z(2, 0) = -0.41$, $z_{\min} = z(0, -6) = -43$