חדו"א 2 שבוע 8

1. משוואת הישר המשיק לקו הפונקציה $y=f(x)$ בנקודה בה $x=x_0$

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

משוואת המישור המשיק למשטח הפונקציה בנקודה בה $(x,y)=(x_0,y_0)$

$$z=f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

נשים לב שהמשוואה הופכת למשוואות הישירים המשיקים למשטח הפונקציה בחתכים אנכיים

$$y=y_0:\ z=f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)$$

$$x=x_0:\ z=f(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

2. משוואת הישר הניצב לקו הפונקציה $y=f(x)$ בנקודה בה $x=x_0$ ו- $f'(x_0)\neq 0$

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

הישר הניצב למשטח הפונקציה בנקודה $P(x_0,y_0)$

הצגה קנונית
$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-f(x_0,y_0)}{-1}$$

הצגה פרמטרית
$$\begin{cases} x=x_0+f_x'(x_0,y_0)\cdot t \\ y=y_0+f_y'(x_0,y_0)\cdot t \\ z=f(x_0,y_0)-t \end{cases}$$

3. משוואת הקירוב הליניארי לפונקציה $z=f(x,y)$ בסביבת הנקודה (x_0,y_0)

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

משוואת הקירוב הליניארי לפונקציה $z=f(x,y)$ בסביבת הנקודה (x_0,y_0,z_0)

$$f((x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

תרגיל 1

א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה $f(x,y)=xe^{xy}$

ב. מצא את משוואת המישור המשיק למשטח הפונקציה בנקודה $(2,0)$

ג. חשב את $2.2e^{-0.22}$ תוך שימוש בקירוב הליניארי של הפונקציה $f(x,y)=xe^{xy}$

ד. מצא את הצגתו הפרמטרית של הישר הניצב למשטח הפונקציה בנקודה $(2,0)$

4. פונקציה $y=f(x)$ נקראת גזירה בנקודה x_0 אם בסביבה של הנקודה מתקיים

$$f(x)=f(x_0)+f'(x)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

או
$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

כאשר $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$ (משמעות גיאומטרית – קיים ישר המשיק לקו הפונקציה בנקודה x_0)

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

לביטוי $df(x)=f'(x)dx$ קוראים דיפרנציאל של הפונקציה $f(x)$

הגדרה

פונקציה $z=f(x,y)$ נקראת דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אם בסביבה של הנקודה

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)+o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

או $$\Delta f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+o(|\Delta\mathbf{r}|)$$

(משמעות גיאומטרית – קיים מישור המשיק למשטח הפונקציה בנקודה (x_0,y_0))

מסקנה מעשית

פונקציה $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אם

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

לביטוי

$$df(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)dx+f_y'(x_0,y_0)dy$$

קוראים דיפרנציאל שלם של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0)

טענה

אם פונקציה $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אז היא רציפה באותה נקודה

משפט

אם פונקציה $z=f(x,y)$ ושתי הנגזרות החלקיות שלה רציפות בנקודה (x_0,y_0) אז הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0)

תרגיל 2

נתונה הפונקציה
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א) מצא את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$

ב) הראה כי הפונקציה אינה רציפה בנקודה $(0,0)$

ג) הראה כי הפונקציה אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$

פתרון א) $$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0,\ \ f_y'(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0$$

ב) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ לא קיים $\left(\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=x}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\neq\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=-x}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=-\dfrac{1}{2}\right)$

ג) $$f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)(x-0)-f_y'(0,0)(y-0)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ לא קיים

$$\left(\lim_{\substack{x\to0+\\y=x^2}}\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2\sqrt2}\neq\lim_{\substack{x\to0-\\y=x^2}}\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{1}{2\sqrt2}\right)$$

תרגיל 3

נתונה הפונקציה
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א) מצא את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$

ב) הראה כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$

ג) בדוק את רציפותן של הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$

ד) הראה כי הפונקציה אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$

פתרון א) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0,\ f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-0}{y}=0$

ב) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x\cdot\dfrac{y^2}{x^2+y^2}=0$ $\left(0\le\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\le 1\right)$

ג) $f'_x(x,y)=\dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ לא רציפה מפני ש- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ לא קיים

$$\left(\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}=0\neq\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}}\frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{12}{5}\right)$$

$f'_x(x,y)=\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$ לא רציפה מפני ש- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$ לא קיים

$$\left(\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{2}\neq\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}}\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{1}{2}\right)$$

ד) $f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)(x-0)-f_y'(0,0)(y-0)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ לא קיים

$$\left(\lim_{\substack{x\to0\\ y=x}}\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \ \lim_{\substack{x\to0\\ y=-x}}\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

תרגיל 4

נתונה הפונקציה $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א) מצא את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0,0)$

ב) הראה כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$

ג) הראה כי הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה $(0,0)$

ד) הראה כי הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$

פתרון א) $$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0,\ f_y'(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0$$

ב) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}=0\quad\left(0\le\frac{y^2}{x^2+y^2}\le1\right)$$

ג) $$f_y'(x,y)=\frac{2x^4y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\qquad f_x'(x,y)=\frac{2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$ - שתי הנגזרות רציפות - למשל

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}2x\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2=0$$

ד) $$f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)(x-0)-f_y'(0,0)(y-0)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}}\cdot|y|=0$$

$$\left(0\le\frac{y^2}{x^2+y^2}\le1,\ 0\le\frac{x^2}{x^2+y^2}\le1\right)$$

5. הצגה וקטורית

אם נגדיר

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \text{ ו- } \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0) \;,\; \mathbf{r} = (x, y)$$

$z = f(x, y)$ גרדיינט של פונקציה $gradf = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

נוכל לרשום

$$\lim_{\Delta\mathbf{r}\to\mathbf{0}} \frac{o(|\Delta\mathbf{r}|)}{|\Delta\mathbf{r}|} = 0 \text{ כאשר } \Delta f(\mathbf{r}_0) = \nabla f(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta\mathbf{r} + o(|\Delta\mathbf{r}|)$$

נגדיר $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ ונציג את הדיפרנציאל השלם של הפונקציה $f(x, y)$ בנקודה $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$

$$df(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0)dx + f_y'(x_0, y_0)dy$$

בצורה וקטורית

$$df(\mathbf{r}_0) = \nabla f(\mathbf{r}_0) \cdot d\mathbf{r}$$

ניתן להכליל את ההצגה הוקטורית לפונקציה של 3 משתנים $u = f(x, y, z)$

כאשר $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ו- $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

ולמספר כללי של משתנים $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

כאשר $\mathbf{r} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ו- $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$

קשר בין דיפרנציאל שלם וכלל השרשרת

אם לכל אחת מהפונקציות $z = f(u,v)$, $u = u(x, y), v = v(x, y)$ יש שתי הנגזרות החלקיות אז ניתן לרשום

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$