$$\frac{(-1)^n}{\ln^2 n} - \frac{(-1)^n}{\left((-1)^n + \ln n\right)\ln n} = \frac{1}{\left((-1)^n + \ln n\right)\ln^2 n} \sim \frac{1}{\ln^3 n}$$

$\sum \ldots$ converges $\Longrightarrow$ $\sum \ldots$?? $\Longleftarrow$ $\sum \ldots$ converges