חדו"א 2 שיעור 7

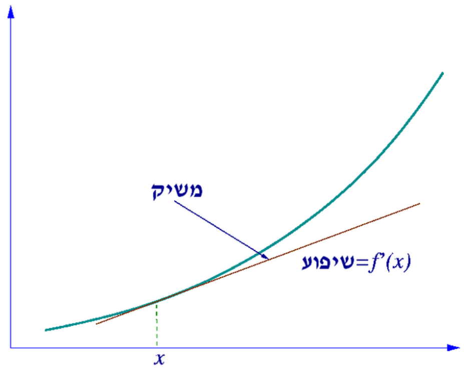
1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון

תזכורת – נגזרת של פונקציה $y=f(x)$

$$f'(x_0)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(במידה והגבול הנ"ל קיים)

משמעות גיאומטרית – שיפוע הישר המשיק לקו הפונקציה בנקודה x_0



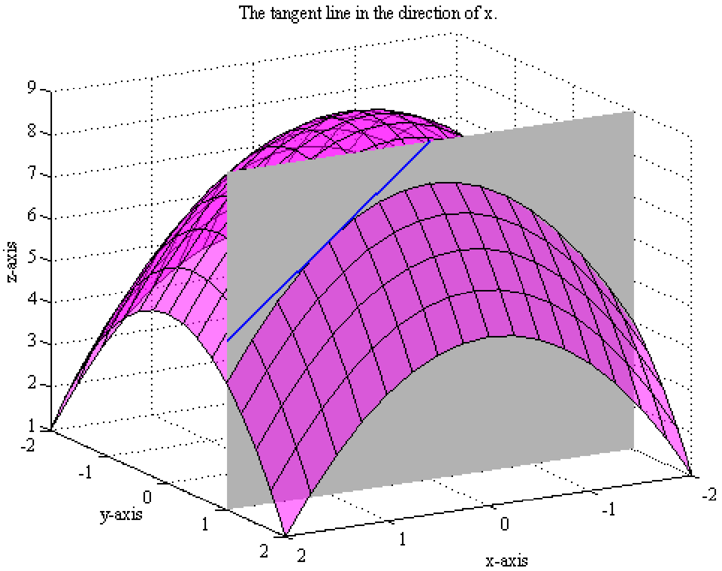
נגזרת חלקית של פונקציה בשני משתנים $z=f(x,y)$

נגזרת חלקית לפי משתנה x בנקודה (x_0,y_0)

$$f_x'(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

(במידה והגבול הנ"ל קיים)

משמעות גיאומטרית – שיפוע הישר המשיק לקו החיתוך של משטח הפונקציה על יד מישור המקביל לצירים הX ו- הZ בנקודה (x_0,y_0)



נגזרת חלקית לפי משתנה y בנקודה (x_0,y_0)

$$f_y'(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

(במידה והגבול הנ"ל קיים)

משמעות גיאומטרית – שיפוע הישר המשיק לקו החיתוך של משטח הפונקציה על יד מישור המקביל לצירים הY ו- הZ בנקודה (x_0, y_0)

טכניקה לחישוב הנגזרות החלקיות

על מנת לחשב $f_x'(x,y)$ *- נגזרת חלקית לפי משתנה* x *נוהגים ב-* y *כמו בקבוע*

לדוגמא $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{y}\right)=\frac{2x}{y}$

על מנת לחשב $f_y'(x,y)$ *- נגזרת חלקית לפי משתנה* y *נוהגים ב-* x *כמו בקבוע*

לדוגמא $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y}\right)=-\frac{x^2}{y^2}$

תרגילים נתונה פונקציה בשני משתנים $z=f(x,y)$ *ונקודה* P

חשב את $z(P),\quad z_x'(x,y),\quad z_x'(P),\quad z_y'(x,y),\quad z_y'(P)$

1) $z(x,y)=e^{-3x}\ln y+\frac{2e^{2x}}{y^3},\ P(0,1)$

2) $z(x,y)=\frac{2x-3y-1}{3x+4y+4},\ P(2,-3)$

3) $z(x,y)=\frac{2x+5y-3}{x^2-y^2},\ P(5,4)$

4) $z(x,y)=e^{x^2+9y}\cdot(xy+4),\ P(3,-1)$

5) $z(x,y)=e^{5x-3y-4}\cdot(2x^2-4xy+y^2),\ P(2,2)$

2. נגזרות חלקיות מסדר שני ומעלה

סימון עבור פונקצית במשתנה אחד $y=f(x)$

$$y'=\frac{dy}{dx},\ y''=\frac{d^2y}{dx^2},\ y'''=\frac{d^3y}{dx^3},\dots,y^{(k)}=\frac{d^ky}{dx^k}$$

עבור פונקצית בשני משתנים $z=f(x,y)$

$$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x},\ z'_y=\frac{\partial z}{\partial y},\ z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

$$z'''_{xxx}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ z'''_{yyy}=\frac{\partial^3 z}{\partial y^3},\ z'''_{xxy}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\dots,z^{(7)}_{xxyyyxx}=\frac{\partial^7 z}{\partial x^2\partial y^3\partial x^2}$$

תרגילים - נתונה פונקצית שני משתנים $z=f(x,y)$ ונקודה P
חשב את $z''_{xx}(x,y), z''_{xx}(P), z''_{xy}(x,y), z''_{xy}(P), z''_{yy}(x,y), z''_{yy}(P)$

6) $z(x,y)=x^3y+x^2\cdot\ln y,\ \ P(-2,1)$

7) $f(x,y)=\dfrac{1}{2x-3y},\ \ P(5,3)$

8) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{y}+\dfrac{y^2}{x^4},\ \ P(1,1)$

9) $z(x,y)=\dfrac{4x+5y}{x+y},\ \ P(2,-1)$

10) $z(x,y)=e^{4x-y-1}\cdot(x^2-xy+2y^2+x-5y-2),\ \ P(1,3)$

11) $z(x,y)=e^{\frac{1}{2}x^2-y}\cdot(x+y-2),\ \ P(-2,2)$

תשובות

1) $z(P)=2,\ z'_x(x,y)=-3e^{-3x}\ln y+\dfrac{4e^{2x}}{y^3},\ z'_x(P)=4,\ z'_y(x,y)=\dfrac{e^{-3x}}{y}-\dfrac{6e^{2x}}{y^4},\ z'_y(P)=-5$

2) $z(P)=-6,\ z'_x(x,y)=\dfrac{17y+11}{(3x+4y+4)^2},\ z'_x(P)=-10,\ z'_y(x,y)=\dfrac{-17x-8}{(3x+4y+4)^2},\ z'_y(P)=-\dfrac{21}{2}$

3) $z(P)=3,\ z'_x(x,y)=\dfrac{-2x^2-2y^2+6x-10xy}{(x^2-y^2)^2},\ z'_x(P)=-\dfrac{28}{9},\ \ z'_y(x,y)=\dfrac{5x^2+5y^2-6y+4xy}{(x^2-y^2)^2},\ z'_y(P)=\dfrac{29}{9}$

4) $z(P)=1,\ z'_x(x,y)=e^{x^2+9y}\cdot(2x^2y+8x+y),\ z'_x(P)=5,\ \ z'_y(x,y)=e^{x^2+9y}\cdot(9xy+x+36),\ z'_y(P)=12$

5) $z(P)=-4,\ z'_x(x,y)=e^{5x-3y-4}\cdot(10x^2-20xy+5y^2+4x-4y),\ \ z'_x(P)=-20,$
$z'_y(x,y)=e^{5x-3y-4}\cdot(-6x^2+12xy-3y^2-4x+2y),\ \ z'_y(P)=8$

6) $z''_{xx}(x,y)=6xy+2\ln y,\ z''_{xx}(P)=-12,\ z''_{xy}(x,y)=3x^2+\dfrac{2x}{y},\ z''_{xy}(P)=8,$
$z''_{yy}(x,y)=-\dfrac{x^2}{y^2},\ z''_{yy}(P)=-4$

7) $z''_{xx}(x,y)=\dfrac{8}{(2x-3y)^3},\ z''_{xx}(P)=8,\ z''_{xy}(x,y)=-\dfrac{12}{(2x-3y)^3},\ z''_{xy}(P)=-12,$
$z''_{yy}(x,y)=\dfrac{18}{(2x-3y)^3},\ z''_{yy}(P)=18$

8) $z''_{xx}(x,y)=\dfrac{6x}{y}+\dfrac{20y^2}{x^6},\ z''_{xx}(P)=26,\ z''_{xy}(x,y)=-\dfrac{3x^2}{y^2}-\dfrac{8y}{x^5},\ z''_{xy}(P)=-11,$
$z''_{yy}(x,y)=\dfrac{2x^3}{y^3}+\dfrac{2}{x^4},\ z''_{yy}(P)=4$

9) $z''_{xx}(x,y)=\dfrac{2y}{(x+y)^3},\ z''_{xx}(P)=-2,\ z''_{xy}(x,y)=\dfrac{-x+y}{(x+y)^3},\ z''_{xy}(P)=-3,$
$z''_{yy}(x,y)=-\dfrac{2x}{(x+y)^3},\ z''_{yy}(P)=-4$

10) $z''_{xx}(x,\,y)=e^{4x-y-1}\cdot(16x^2-16xy+32y^2+32x-88y-22)$, $z''_{xx}(P)=2$,

$z''_{xy}(x,\,y)=e^{4x-y-1}\cdot(-4x^2+4xy-8y^2-10x+37y-14)$, $z''_{xy}(P)=23$,

$z''_{yy}(x,\,y)=e^{4x-y-1}\cdot(x^2-xy+2y^2+3x-13y+12)$, $z''_{yy}(P)=-80$

11) $z''_{xx}(x,\,y)=e^{\frac{1}{2}x^2-y}\cdot(x^3-2x^2+x^2y+3x+y-2)$, $z''_{xx}(P)=-14$,

$z''_{xy}(x,\,y)=e^{\frac{1}{2}x^2-y}\cdot(-x^2-xy+3x-1)$, $z''_{xy}(P)=-7$, $z''_{yy}(x,\,y)=e^{\frac{1}{2}x^2-y}\cdot(x+y-4)$,

$z''_{yy}(P)=-4$

משפט (כלל השרשרת)

1) אם פונקציה $y = f(t)$ בעלת נגזרת רציפה ופונקציה $t = u(x)$ גזירה
אז קיימת נגזרת $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = f'(t) \cdot u'(x)$

2) אם פונקציה $z = f(t)$ בעלת נגזרת רציפה ולפונקציה $t = u(x, y)$ קיימות שתי נגזרות חלקיות אז קיימות שתי הנגזרות החלקיות הבאות

$$z'_x = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = f'(t) \cdot u'_x(x, y)$$

$$z'_y = \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = f'(t) \cdot u'_y(x, y)$$

תרגיל 1

א) מצא נגזרות חלקיות $z'_x,\ z'_y$ של הפונקציות

$z(x, y) = \sqrt{\frac{5x - 2y}{7x - 3y}} + \left(\frac{5x - 2y}{7x - 3y}\right)^3 \cdot \sin\left(\frac{5x - 2y}{7x - 3y}\right)$ (רמז – להגדיר $f(t) = \sqrt{t} + t^3 \cdot \sin t$)

ב) הוכח כי הפונקציה $z(x, y) = f\left(\frac{5x - 2y}{7x - 3y}\right)$ מקיימת את המשוואה $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = 0$

כאשר $f(t)$ היא פונקציה גזירה כלשהי

ג) הוכח כי הפונקציה $z(x, y) = \sqrt{x} \cdot f\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$ מקיימת את המשוואה $2x \cdot z'_x + 2y \cdot z'_y = z$

כאשר $f(t)$ היא פונקציה גזירה כלשהי

3) אם לכל אחת מה פונקציות $z = f(u, v)$, $u = u(x, y), v = v(x, y)$ יש שתי הנגזרות החלקיות רציפות אז קיימות שתי הנגזרות החלקיות הבאות

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f'_u(u, v) \cdot u'_x(x, y) + f'_v(u, v) \cdot v'_x(x, y)$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = f'_u(u, v) \cdot u'_y(x, y) + f'_v(u, v) \cdot v'_y(x, y)$$

תרגיל 2

א) הוכח כי הפונקציה $z(x, y) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$ מקיימת את המשוואה $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = 0$

כאשר $f(u, v)$ היא פונקציה בעלת נגזרות חלקיות

ב) הוכח כי הפונקציה $z(x, y) = f\left(\frac{x}{y^2}, \frac{y^6}{x^3}\right)$ מקיימת את המשוואה $2x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = 0$

כאשר $f(u, v)$ היא פונקציה בעלת נגזרות חלקיות

משפט (נגזרת של פונקציה המוגדרת בצורה סתומה)

1) אם פונקציה $F(x,y)$ מוגדרת בסביבה של נקודה (x_0,y_0) , $F(x_0,y_0)=0$
ל- F יש נגזרות חלקיות רציפות בסביבה של נקודה (x_0,y_0) ו- $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$
אז קיימת סביבה של נקודה (x_0,y_0) שבה מוגדרת פונקציה רציפה וגזירה יחידה $y=f(x)$
כך ש- $f(x_0)=y_0$ ו- $f'(x_0)=-\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$

תרגיל 3

משוואה $e^{x^2-2xy}\cdot(x-3y)+2=0$ מגדירה את y כפונקציה של x
בדוק שפונקציה גזירה בנקודה $P(4,2)$ וחשב את $y'_x(P)$

2) אם פונקציה $F(x,y,z)$ מוגדרת בסביבה של נקודה (x_0,y_0,z_0) , $F(x_0,y_0,z_0)=0$
ל- F יש נגזרות חלקיות רציפות בסביבה של נקודה (x_0,y_0,z_0) ו- $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$
אז קיימת סביבה של נקודה (x_0,y_0,z_0) שבה מוגדרת פונקציה רציפה וגזירה יחידה
$z=f(x,y)$ כך ש- $f(x_0,y_0)=z_0$
ו- $f'_y(x_0,y_0)=-\dfrac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$, $f'_x(x_0,y_0)=-\dfrac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$

תרגיל 4

משוואה $\sqrt{x^2y^3z^4+3}=\ln(3x+2y-4z)+2$ מגדירה את z כפונקציה של x ו- y
בדוק שפונקציה גזירה בנקודה $P(1,1,1)$ וחשב את $z'_x(P)$ ו - $z'_y(P)$

משוואת המישור המשיק למשטח הפונקציה בנקודה $P(x_0,y_0)$

$$z=f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

נשים לב שהמשוואה הופכת למשוואות הישירים המשיקים למשטח הפונקציה בחתכים אנכיים

$$y=y_0:\ z=f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)$$

$$x=x_0:\ z=f(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

הישר הניצב למשטח הפונקציה בנקודה $P(x_0,y_0)$

הצגה קנונית
$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-f(x_0,y_0)}{-1}$$

הצגה פרמטרית
$$\begin{cases} x=x_0+f_x'(x_0,y_0)\cdot t \\ y=y_0+f_y'(x_0,y_0)\cdot t \\ z=f(x_0,y_0)-t \end{cases}$$

משוואת הקירוב הליניארי לפונקציה $z=f(x,y)$ בסביבת הנקודה $P(x_0,y_0)$

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

תרגיל 5

א. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה $f(x,y)=xe^{xy}$
ב. מצא את משוואת המישור המשיק למשטח הפונקציה בנקודה $(2,0)$
ג. חשב את $2.2e^{-0..22}$ תוך שימוש בקירוב הליניארי של הפונקציה $f(x,y)=xe^{xy}$
ד. מצא את הצגתו הפרמטרית של הישר הניצב למשטח הפונקציה בנקודה $(2,0)$