חדו"א 2 שיעור 6 פונקציות רבות משתנים

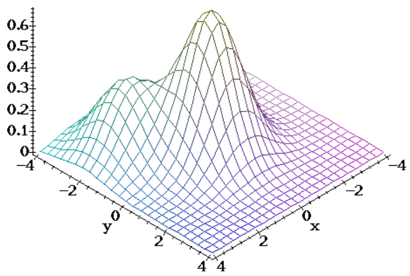
1. הצגה גיאומטרית ותחום הגדרה

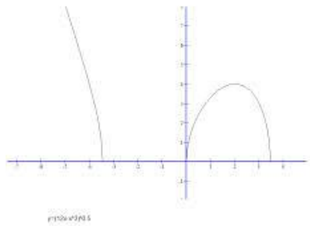
גרף $y=f(x)$

משטח $z=f(x,y)$

$\boxed{y=f(x)}$

$\boxed{z=f(x,y)}$

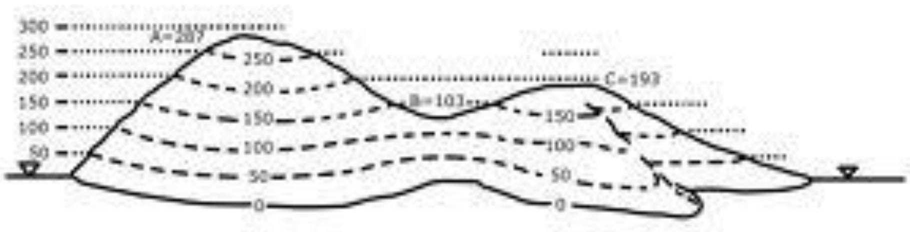


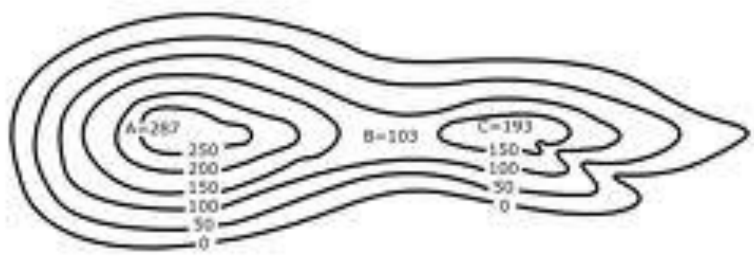


תרגיל – מצא את תחום הגדרתן של הפונקציות הבאות

א) $z=\dfrac{\sqrt{1-x-y}}{\ln(1+x+y)}$ ב) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ ג) $z=\sqrt{100-4x^2-25y^2}$ ד) $z=\dfrac{3x^2+4xy-25y^2}{x^2-y^2}$

2. קווי רמה(גובה)





תרגיל – שרטט את קווי הרמה של הפונקציות הבאות

א) $z=x^2+y^2$ ב) $z=x^2-y^2$ ג) $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ ד) $z=x\cdot y$

3. תחום הגדרה וקווי רמה של פונקציה בשלושה משתנים $u=f(x,y,z)$

תרגיל – תאר את תחום הגדרתן של הפונקציות הבאות

א) $u=\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$ ב) $u=\dfrac{1}{x^2-y^2-z}$ ג) $u=\dfrac{1}{xyz}$

תרגיל – תאר את קווי הרמה של הפונקציות הבאות

א) $u=x^2+y^2+z^2$ ב) $u=\sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$ ג) $u=x+y+z$

4. גבול של פונקציות רבות משתנים

1) אם פונקציה $f(x)$ מוגדרת בסביבה של נקודה x_0 פרט אולי לנקודה x_0 עצמה

מגדירים $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ - גבול של הפונקציה בנקודה x_0

הגדרה (Cauchy) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$

הגדרה (Heine) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$

אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(x_n\neq x_0)$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L$

2) נסמן עבור פונקציה בשלושה משתנים

$$\mathbf{r}=(x,y,z),\mathbf{r}_0=(x_0,y_0,z_0),\ |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

(עבור שני משתנים $\mathbf{r}=(x,y),\mathbf{r}_0=(x_0,y_0),\ |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$)

אם פונקציה $f(\mathbf{r})$ מוגדרת בסביבה של נקודה $\mathbf{r}_0$ פרט אולי לנקודה $\mathbf{r}_0$ עצמה

מגדירים $\lim\limits_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})=L$ - גבול של הפונקציה בנקודה $\mathbf{r}_0$

הגדרה (Cauchy) $\lim\limits_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})=L$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|<\delta$ מתקיים $|f(\mathbf{r})-L|<\varepsilon$

הגדרה (Heine) $\lim\limits_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})=L$

אם לכל סדרה $\{\mathbf{r}_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(\mathbf{r}_n\neq\mathbf{r}_0)$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{r}_n=\mathbf{r}_0$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{r}_n)=L$

דוגמאות
$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)}\frac{xy}{x^2+y^2}=-\frac{2}{5}\qquad\qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

משפט

אם קיים גבול $\lim\limits_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})=L$ אז הגבול הוא יחיד

משפט

אם קיימים גבולות $\lim\limits_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})=L_1$ ו- $\lim\limits_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} g(\mathbf{r})=L_2$ אז קיימים הגבולות הבאים

- $\lim\limits_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\left(f(\mathbf{r})+g(\mathbf{r})\right)=L_1+L_2$ $\qquad$ $\lim\limits_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\left(f(\mathbf{r})-g(\mathbf{r})\right)=L_1-L_2$
- $\lim\limits_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\left(f(\mathbf{r})\cdot g(\mathbf{r})\right)=L_1\cdot L_2$ $\qquad$ $\lim\limits_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\left(f(\mathbf{r})/g(\mathbf{r})\right)=L_1/L_2$ (כאשר $L_2\neq 0$)

תרגילים – חשב את הגבולות הבאים על יד מעבר למשתנה אחד

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ רמז - $t=x^2+y^2$ תשובה 1

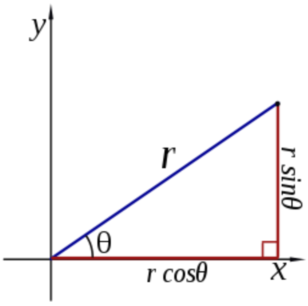
2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{|x|+|y|}$

פתרון

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y^2)}{|x|+|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{|x|+|y|} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^2-|y|^2}{|x|+|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(|x|-|y|)(|x|+|y|)}{|x|+|y|} = 0$$

קואורדינאטות קוטביות



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} r\ge 0 \\ 0\le\theta<2\pi \end{cases}$$

$$x^2+y^2=r^2$$

תרגיל 5) חשב את הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2+x^3)}{x^2+y^2}$

פתרון

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2+x^3)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2+x^3)}{x^2+y^2+x^3}\cdot\frac{x^2+y^2+x^3}{x^2+y^2} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{r\to 0}\frac{r^2+r^3\cos^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0}\left(1+r\cos^3\theta\right) = 1$$

תרגיל 6) חשב את הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|y^2}{x^2+y^2}$ תוך שימוש בכלל סנדוויץ'

פתרון $0\le \dfrac{y^2}{x^2+y^2}\le 1 \Rightarrow 0\le \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|y^2}{x^2+y^2} \le \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$

תשובה 0

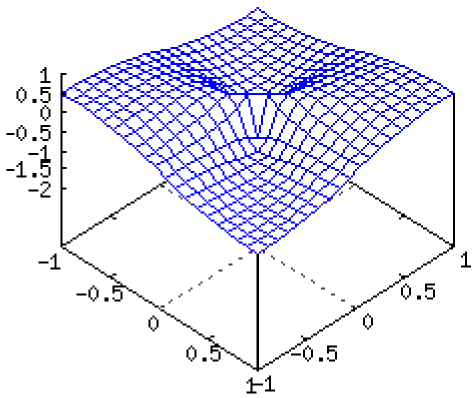
דרך מעשית להוכחת אי קיום הגבול של פונקציה ב- 2 משתנים

להגדיר 2 פונקציות $y = p_1(x)$ ו- $y = p_2(x)$ כך ש- $p_1(x_0) = p_1(x_0) = y_0$

אבל $\lim_{x \to x_0} f(x, p_1(x)) \neq \lim_{x \to x_0} f(x, p_2(x))$

תרגילים – הראה כי גבולות הבאים לא קיימים

7) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ רמז - לבדוק $y = p_1(x) = x$ ו- $y = p_2(x) = -x$



8) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ רמז - לבדוק $y = p_1(x) = x$ ו- $y = p_2(x) = -x$

9) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$ רמז - לבדוק לא רק $y = kx$ אלא גם $y = \sqrt{x}$

01) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ רמז - לבדוק לא רק $y = kx$ אלא גם $y = x^2$

11) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{ye^{\frac{1}{x^2}}}$ רמז - לבדוק $y = p_1(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ו- $y = p_2(x) = -e^{-\frac{1}{x^2}}$

הגדרה (Cauchy) $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = +\infty$

אם לכל $M > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta$ מתקיים $f(\mathbf{r}) > M$

הגדרה (Heine) $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = +\infty$

אם לכל סדרה $\{\mathbf{r}_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(\mathbf{r}_n \neq \mathbf{r}_0)$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{r}_n) = +\infty$

$$\left(\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} [-f(\mathbf{r})] = +\infty \right)$$

הגדרה (Cauchy) $\lim_{\mathbf{r}\to\infty} f(\mathbf{r}) = L$

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $\mathbf{r} > \delta$ מתקיים $|f(\mathbf{r}) - L| < \varepsilon$

הגדרה (Heine) $\lim_{\mathbf{r}\to\infty} f(\mathbf{r}) = L$

אם לכל סדרה $\{\mathbf{r}_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} \mathbf{r}_n = \infty$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{r}_n) = L$

הגדרה (Cauchy) $\lim_{\mathbf{r}\to\infty} f(\mathbf{r}) = +\infty$

אם לכל $M > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $\mathbf{r} > \delta$ מתקיים $f(\mathbf{r}) > M$

הגדרה (Heine) $\lim_{\mathbf{r}\to\infty} f(\mathbf{r}) = +\infty$

אם לכל סדרה $\{\mathbf{r}_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} \mathbf{r}_n = \infty$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{r}_n) = +\infty$

5. רציפות של פונקציות רבות משתנים

הגדרה

פונקציה $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = L$ נקראת רציפה בנקודה $\mathbf{r}_0$ במידה ו-

א) מוגדר ערך $f(\mathbf{r}_0)$

ב) קיים גבול $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})$

ג) $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0)$

תרגיל 12) בדוק את רציפותה של הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}}{x-y}, & x \neq y \\ 1, & x = y \end{cases}$$

בנקודה $(0,0)$ או

פתרון

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\right)}{(x-y)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\right)} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)}{(x-y)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\right)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}} = \frac{1}{2} \neq 1$$

לכן הפונקציה אינה רציפה בנקודה $(0,0)$

תרגיל 13) בדוק את רציפותה של הפונקציה

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{x^4+y^4+z^4}{x^2+y^2+z^2}, & x^2+y^2+z^2\neq 0 \\ 0 & , x^2+y^2+z^2=0 \end{cases}$$ בנקודה $(0,0,0)$

פתרון

$$\frac{x^4+y^4+z^4}{x^2+y^2+z^2}=\frac{x^4}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^4}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^4}{x^2+y^2+z^2}$$

$0\le\dfrac{x^4}{x^2+y^2+z^2}\le\dfrac{x^4}{x^2}=x^2$ לכן $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{x^4}{x^2+y^2+z^2}=0$

באופן דומה $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{y^4}{x^2+y^2+z^2}=\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{z^4}{x^2+y^2+z^2}=0$

לכן $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x^2+y^2+z^2}=0$ ולכן הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0,0)$

תרגיל 14) האם ניתן להגדיר את ערכו של הפרמטר a כך שפונקציה

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x+y+z)-\sin(x+y)}{z}, & z\neq 0 \\ a & , z=0 \end{cases}$$

תהיה רציפה בנקודה $(0,0,0)$

פתרון

תוך שימוש בזהות $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ נקבל

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\sin(x+y+z)-\sin(x+y)}{z}=$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{2\cos\left(x+y+\frac{z}{2}\right)\sin\frac{z}{2}}{z}=1=a$$