

שיעור 9

התמרת לפלס – העתקה ליניארית במרחב הפונקציות $L: f(t) \rightarrow g(s)$

המוגדרת על ידי

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = g(s), s > 0$$

תרגיל 1 הראה כי מתקיים

$f(t)$	$g(s) = L[f(t)]$	תנאי
0	0	אין
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	$s > 0$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	$s > 0$

תרגיל 2 הראה כי מתקיים

$$(n \in \mathbf{N}) \quad L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{ב}, \quad L[t^n] = \frac{n}{s} \cdot L[t^{n-1}] \quad \text{א.}$$

תרגיל 3 הראה כי מתקיים $L[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha L[f_1(t)] + \beta L[f_2(t)]$

תרגיל 4 הראה כי מתקיים משפט הזזה הראשון

$$L[f(t)] = g(s) \Rightarrow L[e^{at} f(t)] = g(s-a)$$

תרגיל 5 הראה כי מתקיים

$f(t)$	$g(s) = L[f(t)]$	תנאי
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$

תרגיל 6 הראה כי מתקיים

$$L[f(t)] = g(s) \Rightarrow L[f'(t)] = sg(s) - f(0) \quad .א$$

$$L[f^{(n)}(t)] = L[f^{(n-1)}(t)] - f^{(n-1)}(0) \quad .ב$$

$$L[f(t)] = g(s) \Rightarrow L[f^{(n)}(t)] = s^n g(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \quad .ג$$

$$L[f(t)] = g(s) \Rightarrow L[f''(t)] = s^2 g(s) - sf'(0) - f''(0) \quad .ד$$

$$L[f(t)] = g(s) \Rightarrow L[f'''(t)] = s^3 g(s) - s^2 f'(0) - sf''(0) - f'''(0) \quad .ה$$

תרגיל 7 פתור את המשוואות הבאות תוך שימוש בהתמרת לפלס

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 50y = 0 \\ y(0) = 4, y'(0) = 2 \end{cases} \quad .א, \begin{cases} y'' - 3y' = 12e^t \\ y(0) = -1, y'(0) = -4 \end{cases} \quad .ב, \begin{cases} y'' - 9y' + 20y = 0 \\ y(0) = -1, y'(0) = -7 \end{cases} \quad .א$$

פתרון - נגדיר $L[y] = g(s), s > 0$

$$L(y'' - 9y' + 20y) = L(0) \quad .א$$

$$s^2 g(s) - sy(0) - y'(0) - 9(sg(s) - y(0)) + 20g(s) = 0$$

$$(s^2 - 9s + 20)g(s) = sy(0) - 9y(0) + y'(0) = -s + 2$$

$$g(s) = \frac{-s+2}{s^2-9s+20} = \frac{-s+2}{(s-4)(s-5)} = \frac{2}{s-4} - \frac{3}{s-5} \Rightarrow y = 2e^{4t} - 3e^{5t}$$

$$L(y'' - 3y') = L(12e^t) \quad .ב$$

$$s^2 g(s) - sy(0) - y'(0) - 3(sg(s) - y(0)) = \frac{12}{s-1}$$

$$(s^2 - 3s)g(s) = s + 1 + \frac{12}{s-1} \Rightarrow g(s) = \frac{s+1}{(s^2-3s)} + \frac{12}{(s-1)(s^2-3s)}$$

$$g(s) = \frac{s+1}{s(s-3)} + \frac{12}{s(s-1)(s-3)} = \frac{10}{3s} - \frac{6}{s-1} + \frac{5}{3(s-3)} \Rightarrow y = \frac{10}{3} - 6e^t + \frac{5}{3}e^{3t}$$

$$L(y'' - 2y' + 50y) = L(0) \quad .ג$$

$$s^2 g(s) - sy(0) - y'(0) - 2(sg(s) - y(0)) + 50g(s) = 0$$

$$(s^2 - 2s + 50)g(s) = 4s - 6$$

$$g(s) = \frac{4s-6}{s^2-2s+50} = \frac{4s-6}{(s-1)^2+7^2} = 4 \frac{s-1}{(s-1)^2+7^2} - \frac{2}{7} \frac{7}{(s-1)^2+7^2}$$

$$y = 4e^t \cos 7t - \frac{2}{7} e^t \sin 7t$$

שיעורי בית

I. כתוב התמרת לפלס לפונקציות הבאות :

$$1) f(t) = t^3 + 4t - 5 + 7e^{-2t}$$

$$2) f(t) = 2 \sin 5t - 3 \cos 8t$$

$$3) f(t) = 6e^{4t}t^2$$

$$4) f(t) = 2e^{-3t} \cos \pi t - 4e^t \sin 5t$$

$$5) f(t) = t^2 e^t + 2te^{-t} + 4 \cosh 2t$$

$$6) f(t) = t \sin \omega t$$

$$7) f(t) = t \cos \omega t$$

$$8) f(t) = \cos^2 \omega t$$

$$9) f(t) = (\cos 2t)(\sin 3t)$$

$$10) f(t) = t^2 \sinh 3t$$

תשובות :

$$1) F(s) = \frac{6}{s^4} + \frac{4}{s^2} - \frac{5}{s} + \frac{7}{s+2}, \quad s > 0$$

$$2) F(s) = \frac{10}{s^2 + 25} - \frac{3s}{s^2 + 64}, \quad s > 0$$

$$3) F(s) = \frac{12}{(s-4)^3}, \quad s > 4$$

$$4) F(s) = \frac{2s+6}{s^2 + 6s + 9 + \pi^2} - \frac{20}{s^2 - 2s + 26}, \quad s > 1$$

$$5) F(s) = \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{4s}{s^2 - 4}, \quad s > 2$$

$$6) F(s) = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}, \quad s > 0$$

$$7) F(s) = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}, \quad s > 0$$

$$8) F(s) = \frac{0.5}{s} + \frac{0.5s}{s^2 + 4\omega^2}, \quad s > 0$$

$$9) F(s) = \frac{0.5s}{s^2 + 1} + \frac{2.5}{s^2 + 25}, \quad s > 0$$

$$10) F(s) = \frac{18(s^2 + 3)}{(s^2 - 9)^3}, \quad s > 3$$

II. כתוב התמרות הפוכות עבור $F(s)$ הנתונות.

$$1) F(s) = \frac{4s+5}{s^2+9}$$

$$2) F(s) = \frac{1}{(2s-3)(s+6)}$$

$$3) F(s) = \frac{2s+6}{s^2+2s+10}$$

$$4) F(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$$

תשובות

$$1) f(t) = 4 \cos 3t + \frac{5}{3} \sin 3t$$

$$2) f(t) = -\frac{1}{15} e^{-6t} + \frac{1}{15} e^{1.5t}$$

$$3) f(t) = 2e^{-t} \cos 3t + \frac{4}{3} e^{-t} \sin 3t$$

$$4) f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{2} t e^{-2t}$$

III. פתור את המשוואות הבאות תוך שימוש בהתמרת לפלס

$$1) x'' + 4x = \cos 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1 \quad 2) \begin{cases} x' = x + 2y - 9t \\ y' = 2x + y + 4e^t \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2$$

תשובות

$$1) x = \cos 2t + 0.25(t-2)\sin 2t \quad 2) \begin{cases} x = 5 - 3t - 4e^{-t} - 2e^t + 2e^{3t} \\ y = 6t - 4 + 4e^{-t} + 2e^{3t} \end{cases}$$

IV. פתור את המשוואות הבאות

1. $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
4. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
5. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$
6. $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$
7. $y^{(4)} - 4y' + 6y'' - 4y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$
8. $y^{(4)} - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = 0$

תשובות

1. $y(t) = 0.2(e^{3t} + 4e^{-2t})$
2. $y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$
3. $y(t) = e^t \sin t$
4. $y(t) = e^{2t}(1-t)$
5. $y(t) = 2e^t \left(\cosh(\sqrt{3}t) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh(\sqrt{3}t) \right)$
6. $y(t) = 0.5e^{-t}(4\cos 2t + \sin 2t)$
7. $y(t) = \left(1 - t + \frac{2}{3}t^2 \right) te^t$
8. $y(t) = \cos \sqrt{2}t$

V. חוברת – עמ' 26-27, תרגילים 318-324