שיעור 7

1. משוואה דיפרנציאלית מדויקת

דיפרנציאל מלא של פונקציה בשני משתנים $du(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy$

אם $u(x,y)=C$ - פונקציה קבועה אז $du(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy=0$

משוואה דיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ נקראת **מדויקת** אם קיימת פונקציה $u(x,y)$ המקיימת $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=M(x,y),\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$ ואז פתרון המשוואה הדיפרנציאלית הוא $u(x,y)=C$

שלב 1 – בדיקה

משוואה דיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ היא מדויקת אם ורק אם

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y\partial x}$$

שלב 2 – פתרון

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=M(x,y)\Rightarrow u(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y)\Rightarrow\left(\int M(x,y)dx+C(y)\right)'_y=N(x,y)$$

או

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=N(x,y)\Rightarrow u(x,y)=\int N(x,y)dy+C(x)\Rightarrow\left(\int N(x,y)dy+C(x)\right)'_x=M(x,y)$$

דוגמא 1

$$\left(2e^{2x}\sin 3y+3x^2\right)dx+\left(3e^{2x}\cos 3y-2y\right)dy=0$$

בדיקה - $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=6e^{2x}\cos 3y$ לכן המשוואה מדויקת

פתרון 1

$$u(x,y)=\int\left(2e^{2x}\sin 3y+3x^2\right)dx=e^{2x}\sin 3y+x^3+C(y)$$

$$\left(e^{2x}\sin 3y+x^3+C(y)\right)'_y=3e^{2x}\cos 3y+C'(y)=N(x,y)=3e^{2x}\cos 3y-2y$$

$$C'(y)=-2y\Rightarrow C(y)=-y^2+C$$

תשובה $e^{2x}\sin 3y+x^3-y^2=C$

פתרון 2

$$u(x,y)=\int\left(3e^{2x}\cos 3y-2y\right)dy=e^{2x}\sin 3y-y^2+C(x)$$

$$\left(e^{2x}\sin 3y-y^2+C(x)\right)'_x=2e^{2x}\sin 3y+C'(x)=M(x,y)=2e^{2x}\sin 3y+3x^2$$

$$C'(x)=3x^2\Rightarrow C(y)=x^3+C$$

תשובה $e^{2x}\sin 3y-y^2+x^3=C$

2. גורם אינטגרציה $\mu(x,y)$ ההופך משוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ למדויקת

כלומר ייתקיים $\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$

$$\frac{\partial(\mu(x,y)M(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(x,y)N(x,y))}{\partial x}$$

מקרה 1 – אם גורם האינטגרציה אינו תלוי ב- y כלומר צורתו $\mu(x)$

אזי $\frac{\partial(\mu(x)N(x,y))}{\partial x}=\mu'(x)N(x,y)+\mu(x)N'_x(x,y)$, $\frac{\partial(\mu(x)M(x,y))}{\partial y}=\mu(x)M'_y(x,y)$,

לכן $\mu(x)M'_y(x,y)=\mu'(x)N(x,y)+\mu(x)N'_x(x,y)$ ולכן $\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)}=\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$

מכן הביטוי $\frac{M'_y(x,y)-M'_x(x,y)}{N(x,y)}$ אינו תלוי ב- y

(בדיקה כי גורם האינטגרציה אכן אינו תלוי ב- y)

ו- $\ln|\mu(x)|=\int\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)}dx$ ואז $\mu(x)=e^{\int\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)}dx}$

מקרה 2 – אם גורם האינטגרציה אינו תלוי ב- x כלומר צורתו $\mu(y)$

אזי $\frac{\partial(\mu(y)N(x,y))}{\partial x}=\mu(y)N'_x(x,y)$, $\frac{\partial(\mu(y)M(x,y))}{\partial y}=\mu'(y)M(x,y)+\mu(y)M'_y(x,y)$,

לכן $\mu'(y)M(x,y)+\mu(y)M'_y(x,y)=\mu(y)N'_x(x,y)$ ולכן $\frac{N'_x(x,y)-M'_y(x,y)}{M(x,y)}=\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}$

מכן הביטוי $\frac{N'_x(x,y)-M'_y(x,y)}{M(x,y)}$ אינו תלוי ב- x

(בדיקה כי גורם האינטגרציה אכן אינו תלוי ב- x)

ו- $\ln|\mu(y)|=\int\frac{N'_x(x,y)-M'_y(x,y)}{M(x,y)}dy$ ואז $\mu(y)=e^{\int\frac{N'_x(x,y)-M'_y(x,y)}{M(x,y)}dy}$

דוגמא 2

$$\left(1-x^2y\right)dx+\left(x^2y-x^3\right)dy=0$$

בדיקה - $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-x^2 \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2xy-3x^2$ לכן המשוואה אינה מדויקת

$$\frac{M'_y(x,y)-M'_x(x,y)}{N(x,y)}=\frac{-x^2-2xy+3x^2}{x^2y-x^3}=\frac{2x^2-2xy}{x^2y-x^3}=\frac{2x(x-y)}{-x^2(x-y)}=-\frac{2}{x}$$

לכן גורם האינטגרציה אינו תלוי ב- y

$$\mu(x)=e^{\int\frac{M'_y(x,y)-N'_x(x,y)}{N(x,y)}dx}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2}\left(1-x^2y\right)dx+\frac{1}{x^2}\left(x^2y-x^3\right)dy=0$$

$$\left(\frac{1}{x^2}-y\right)dx+(y-x)dy=0$$ המשוואה הופכת למדויקת

$$\frac{\partial(\mu(x,y)M(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(x,y)N(x,y))}{\partial x}=-1$$

$$u(x,y)=\int(y-x)dy=\frac{y^2}{2}-xy+C(x)$$

$$\left(\frac{y^2}{2}-xy+C(x)\right)'_x=-y+C'(x)=\frac{1}{x^2}-y\Rightarrow C'(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow C(x)=-\frac{1}{x}+C$$

תשובה $\frac{y^2}{2}-xy-\frac{1}{x}=C$

דוגמא 3

$$\left(2y+2xy^2\right)dx+\left(x^2y+2y+2\right)dy=0$$

בדיקה - $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2+4xy \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2xy$ לכן המשוואה אינה מדויקת

$\frac{M'_y(x,y)-M'_x(x,y)}{N(x,y)}=\frac{2+4xy-2xy}{x^2y+2y+2}=\frac{2+2xy}{x^2y-x^3}$ לכן גורם האינטגרציה אינו $\mu(x)$

$\frac{N'_x(x,y)-M'_y(x,y)}{M(x,y)}=\frac{-2-2xy}{2y+2xy^2}=\frac{-2(1+xy)}{2y(1+xy)}=-\frac{1}{y}$ אינו תלוי ב- x

$$\mu(y)=e^{\int\frac{N'_x(x,y)-M'_y(x,y)}{M(x,y)}dx}=e^{-\int\frac{1}{y}dy}=\frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y}\left(2y+2xy^2\right)dx+\frac{1}{y}\left(x^2y+2y+2\right)dy=0$$

המשוואה הופכת למדויקת $\left(2+2xy\right)dx+\left(x^2+2+\frac{2}{y}\right)dy=0$

$$\frac{\partial\left(\mu(x,y)M(x,y)\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\mu(x,y)N(x,y)\right)}{\partial x}=2x$$

$$u(x,y)=\int\left(2+2xy\right)dx=2x+x^2y+C(y)$$

$$\left(2x+x^2y+C(y)\right)'_y=x^2+C'(y)=x^2+2+\frac{2}{y}\Rightarrow C'(y)=2+\frac{2}{y}\Rightarrow C(y)=2y-\ln|y|+C$$

תשובה $2x+x^2y+2y-\ln|y|=C$

שיעורי בית

חוברת – עמ' 7-9, תרגילים 97-122,

דפים 123 – עמ' 16-17