שיעור 6

1. מערכות של משוואות דיפרנציאליות ליניארית הומוגניות עם מקדמים קבועים

$$\begin{cases} x_1'(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\ldots+a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\ldots+a_{2n}x_n(t) \\ \ldots \\ x_n'(t)=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\ldots+a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$ **או** $$X'(t)=A\cdot X(t)$$

כאשר
$$X'(t)=\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \ldots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

דוגמא 1

$$\begin{cases} x'(t)=3x(t)+2y(t) \\ y'(t)=-4x(t)-3y(t) \end{cases}$$ **או** $$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

דוגמא 2

$$\begin{cases} x'(t)=6x(t)+y(t)+2z(t) \\ y'(t)=-6x(t)-3y(t) \\ z'(t)=-6x(t)-2y(t)-z(t) \end{cases}$$ **או** $$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -6 & -3 & 0 \\ -6 & -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

במידה ומטריצה A ניתנת לליכסון ניתן להציג את הפתרון הכללי למערכת בצורה $X(t)=c_1X_1e^{\lambda_1 t}+c_2X_2e^{\lambda_2 t}+\ldots+c_nX_ne^{\lambda_n t}$ כאשר $c_1,c_2,\ldots,c_n$ - קבועים כלליים,

$X_1,X_2,\ldots,X_n$ - וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית של A ,

$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ - ערכים עצמיים המתאימים לוקטורים עצמיים הנ"ל (ערך עצמי מופיע מספר פעמים השווה לריבוי האלגברי שלו)

במידה וערך עצמי הוא מספר מרוכב יש להציג את הפתרון הכללי בצורה ממשית, נניח (ללא הגבלת הכלליות)

$$\lambda_1=\alpha+\beta i,\lambda_2=\alpha-\beta i\Rightarrow X_1=Y_1+Y_2 i, X_1=Y_1-Y_2 i$$

הפתרון הכללי ייראה כדלקמן

$$X(t)=c_1X_1e^{\lambda_1 t}+c_2X_2e^{\lambda_2 t}+\ldots=c_1(Y_1\cos\beta t-Y_2\sin\beta t)e^{\alpha t}+c_2(Y_1\sin\beta t+Y_2\cos\beta t)e^{\alpha t}+\ldots$$

פתרון דוגמא 1

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3+1 & 2 \\ -4 & -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ -4 & -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} \\ y(t) = -2c_1 e^{-t} - c_2 e^{t} \end{cases}$$

פתרון דוגמא 2

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & 2 \\ -6 & -3-\lambda & 0 \\ -6 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3 \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}\right) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 + c_3 e^{t} \\ y(t) = -3c_1 e^{-t} - 2c_2 - c_3 e^{t} \\ z(t) = -2c_1 e^{-t} - 2c_2 - c_3 e^{t} \end{cases}$$

דוגמא 3

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{או} \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{12} = \pm i$$

$$\lambda_1 = i \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = -i, X_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \beta t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \beta t \right) + c_2 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \beta t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \beta t \right)$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 (2\cos \beta t - \sin \beta t) + c_2 (2\sin \beta t + \cos \beta t) \\ y(t) = c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t \end{cases}$$

2. מערכות של משוואות דיפרנציאליות ליניארית אי הומוגניות עם מקדמים קבועים

$$\begin{cases} x_1'(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\ldots+a_{1n}x_n(t)+f_1(t) \\ x_2'(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\ldots+a_{2n}x_n(t)+f_2(t) \\ \ldots \\ x_n'(t)=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\ldots+a_{nn}x_n(t)+f_n(t) \end{cases}$$

דוגמא 4

$$\begin{cases} x'(t)=x(t)-y(t)+3e^{-2t} \\ y'(t)=2x(t)+3y(t)+e^{-2t} \end{cases}$$

פתרון – מהמשוואה הראשונה נקבל

$y(t)=-x'(t)+x(t)+3e^{-2t}$, נגזור את המשוואה $y'(t)=-x''(t)+x'(t)-6e^{-2t}$ ונציב את שני הביטויים במשוואה השניה

$$-x''(t)+x'(t)-6e^{-2t}=2x(t)-3x'(t)+3x(t)+9e^{-2t}+e^{-2t}$$

$$x''(t)-4x'(t)+5x(t)=16e^{-2t}$$

הפתרון ההומוגני $x_h(t)=e^{2t}(c_1\cos t+c_2\sin t)$

את הפתרון אי ההומוגני נחפש בצורה $x_p(t)=ae^{-2t}$ - נציב במשוואה

$x''(t)-4x'(t)+5x(t)=16e^{-2t}$ ונקבל $4a+8a+5a=16 \Leftarrow a=\frac{16}{17}$

הפתרון הכללי אי הומוגני $x(t)=e^{2t}(c_1\cos t+c_2\sin t)+\frac{16}{17}e^{-2t}$ לכן

$x'(t)=e^{2t}((2c_1+c_2)\cos t+(2c_2-c_1)\sin t)-\frac{32}{17}e^{-2t}$ ולכן

$$y(t)=-x'(t)+x(t)+3e^{-2t}=e^{2t}(-c_1\cos t+(c_1-c_2)\sin t)+\frac{99}{17}e^{-2t}$$

תשובה

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=c_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin \beta t\right)e^{2t}+c_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\sin t+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t\right)e^{2t}+\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 16 \\ 99 \end{pmatrix}e^{-2t}$$

שיעורי בית - מצא את הפתרון הכללי למשוואה

דפים 456 – עמ' 7

חוברת – עמ' 35-37, תרגילים 353-372, 374, 376, 378-382, 386-404