שיעור 5

משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים

$$ay''+by'+cy=p(x),\ a\neq 0$$

את הפתרון הכללי למשוואה ניתן להציג בצורה $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_p(x)$

כאשר $y_1(x),\ y_2(x)$ - 2 פתרונות פרטיים בלתי תלויים ליניארית של **המשוואה ההומוגנית המתאימה** $ay''+by'+cy=0$

ו- $y_p(x)$ - פתרון פרטי שרירותי של המשוואה **אי ההומוגנית** הנתונה.

2. שיטת הוריאציה של קבוע

דוגמא

$$y''+y=\frac{1}{\sin x}\Rightarrow y_h=C_1\cdot\cos x+C_2\cdot\sin x\Rightarrow y=C_1(x)\cdot\cos x+C_2(x)\cdot\sin x$$

$$y'=C_1'(x)\cdot\cos x+C_2'(x)\cdot\sin x-C_1(x)\cdot\sin x+C_2(x)\cdot\cos x$$

נחפש פתרון פרטי המקיים $C_1'(x)\cdot\cos x+C_2'(x)\cdot\sin x=0$

אזי $y'=-C_1(x)\cdot\sin x+C_2(x)\cdot\cos x$

ולכן $y''=-C_1'(x)\cdot\sin x+C_2'(x)\cdot\cos x-C_1(x)\cdot\cos x-C_2(x)\cdot\sin x$

נציב את הביטוי במשוואה הנתונה ונקבל

$$-C_1'(x)\cdot\sin x+C_2'(x)\cdot\cos x-C_1(x)\cdot\cos x-C_2(x)\cdot\sin x+C_1(x)\cdot\cos x+C_2(x)\cdot\sin x=\frac{1}{\sin x}$$

ולאחר הצמצום $-C_1'(x)\cdot\sin x+C_2'(x)\cdot\cos x=\frac{1}{\sin x}$.

קיבלנו מערכת של 2 משוואות
$$\begin{cases}C_1'(x)\cdot\cos x+C_2'(x)\cdot\sin x=0 & \cdot\sin x\\ -C_1'(x)\cdot\sin x+C_2'(x)\cdot\cos x=\dfrac{1}{\sin x} & \cdot\cos x\end{cases}$$

$$\begin{cases}C_1'(x)\cdot\sin x\cos x+C_2'(x)\cdot\sin^2 x=0\\ -C_1'(x)\cdot\sin x\cos x+C_2'(x)\cdot\cos^2 x=\dfrac{\cos x}{\sin x}\end{cases}+\Rightarrow C_2'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$C_2(x)=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\ln|\sin x|+C_2$$

$$C_1'(x)=-C_2'(x)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=-1\Rightarrow C_1(x)=-\int dx=-x+C_1$$

הפתרון הכללי $y=(-x+C_1)\cdot\cos x+(\ln|\sin x|+C_2)\cdot\sin x$.

שיטת הוריאציה של קבוע במקרה הכללי

$$ay'' + by' + cy = p(x),\ a \neq 0$$

$$y_h = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_1(x) \Rightarrow y = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$$

כאשר

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = p(x) \end{cases}$$

3. משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר n עם מקדמים קבועים

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = p(x),\ a_0 \neq 0$$

את הפתרון הכללי ל**משוואה הומוגנית המתאימה**

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

ניתן להציג בצורה $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$

כאשר $y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x)$ - **n** פתרונות פרטיים בלתי תלויים ליניארית,

אותם מחפשים בצורת פונקציה מעריכית $y = e^{\lambda x}$ ההופכת את המשוואה

ל**משוואה האופיינית** $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

דוגמא $y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0 \Rightarrow \lambda^4 - 3\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i, \pm 2$

הפתרון הכללי $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{-2x} + C_4 e^{2x}$

בדיקת אי תלות ליניארית של פתרונות פרטיים ניתן לבדוק באמצעות ורונסקיאן

$$\{y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x)\} \Leftrightarrow W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_1'(x) & \ldots & y_1'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_1^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

בלתי תלויות ליניארית

בדוגמא
$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x & e^{-2x} & e^{2x} \\ -\sin x & \cos x & -2e^{-2x} & 2e^{2x} \\ -\cos x & -\sin x & 4e^{-2x} & 4e^{2x} \\ \sin x & -\cos x & -8e^{-2x} & 8e^{2x} \end{vmatrix} \neq 0$$

את הפתרון הכללי למשוואה אי הומוגנית ניתן להציג בצורה $y = y_h(x) + y_p(x)$

כאשר $y_p(x)$ - פתרון פרטי שרירותי של המשוואה אי ההומוגנית אותו מחפשים

בשיטת התאמת המקדמים או בשיטת הוריאציה

שיעורי בית *- מצא את הפתרון הכללי למשוואה*

.1 $y''+y=\frac{1}{\cos x}$ *תשובה* $y=(\ln|\cos x|+C_1)\cdot\cos x+(x+C_2)\cdot\sin x$

.2 $y''-2y'+2y=\frac{e^x}{\cos x}$ *תשובה* $y=e^x(\ln|\cos x|+C_1)\cdot\cos x+e^x(x+C_2)\cdot\sin x$

.3 $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$ *תשובה* $y=e^x(-x+C_1)+xe^x(\ln|x|+C_2)$

.4 $y''+3y'+2y=\frac{1}{1+e^x}$ *תשובה* $y=e^{-x}(\ln(e^x+1)+C_1)+e^{-2x}(\ln(e^x+1)+C_2)$

.5 $y''-6y'+9y=\frac{e^{3x}}{x+1}$ *תשובה* $y=e^{3x}(\ln|x+1|+C_1)+xe^{3x}(\ln|x+1|+C_2)$

דפים 456 – עמ' 6, תרגילים 6,7,

חוברת – עמ' 19, תרגילים 251-258