

## שיעור 4

**משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים**

$$ay'' + by' + cy = p(x), a \neq 0$$

את הפתרון הכללי למשוואה הומוגנית המתאימה  $ay'' + by' + cy = 0$

$$, y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \text{ בצורה}$$

כאשר  $y_1(x), y_2(x)$  - 2 פתרונות פרטיים בלתי תלויים ליניארית,

אותם מחפשים בצורת פונקציה מעריכית  $y = e^{\lambda x}$  ההופכת את המשוואה

$$ay'' + by' + cy = 0 \text{ למשוואה האופיינית } a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

**מקרה 1** - למשוואה האופיינית יש 2 שורשים ממשיים שונים  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

$$\text{אזי } y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \text{ והפתרון הכללי יהיה } y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

דוגמאות - למשוואה  $y'' - 5y' + 6y = 0$  הפתרון הכללי הנו  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

$$\text{ולמשוואה } y'' - 5y' = 0 \text{ הפתרון הכללי הנו } y = C_1 + C_2 e^{5x}$$

### מקרה 2

למשוואה האופיינית יש 2 שורשים ממשיים שווים  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ .

$$\text{אזי } y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x} \text{ והפתרון הכללי יהיה } y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = x e^{\lambda x}$$

דוגמא - למשוואה  $y'' - 6y' + 9y = 0$  הפתרון הכללי  $y = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$

### מקרה 3

למשוואה האופיינית יש 2 שורשים מרוכבים צמודים  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ .

$$\text{אזי } y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$\text{והפתרון הכללי יהיה } y = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

**דוגמאות**

למשוואה  $y'' - 6y' + 13y = 0$  הפתרון הכללי הנו  $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{3x}$

ולמשוואה  $y'' + 4y' + 5y = 0$  הפתרון הכללי הנו  $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) e^{-2x}$

**תרגילים**

$$(y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-9x} \text{ תשובה}) \quad y'' + 4y' - 45y = 0 \quad .1$$

$$(y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{-x} \text{ תשובה}) \quad y'' + 7y' + 6y = 0 \quad .2$$

$$\begin{array}{ll}
 (y = C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 e^{\frac{x}{2}} \text{ תשובה}) & 6y'' - y' - y = 0 \quad .3 \\
 (y = C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \text{ תשובה}) & 2y'' + y' = 0 \quad .4 \\
 (y = (C_1 + C_2 x)e^{4x} \text{ תשובה}) & y'' - 8y' + 16y = 0 \quad .5 \\
 (y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{3x}{2}} \text{ תשובה}) & 4y'' - 12y' + 9y = 0 \quad .6 \\
 (y = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-7x} \text{ תשובה}) & y'' - 49y = 0 \quad .7 \\
 (y = (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)e^{-3x} \text{ תשובה}) & y'' + 6y' + 34y = 0 \quad .8 \\
 (y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^x \text{ תשובה}) & y'' - 2y' + 5y = 0 \quad .9 \\
 (y = C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x \text{ תשובה}) & y'' + 49y = 0 \quad .10
 \end{array}$$

**משוואה ליניארית אי הומוגנית**  $ay'' + by' + cy = p(x)$ ,  $a \neq 0$

את הפתרון הכללי למשוואה ניתן להציג בצורה  $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x)$

כאשר  $y_1(x), y_2(x)$  - 2 פתרונות פרטיים בלתי תלויים ליניארית של

המשוואה ההומוגנית המתאימה  $ay'' + by' + cy = 0$

-  $y_p(x)$  - פתרון פרטי שרירותי של המשוואה אי הומוגנית הנתונה.

### 1. שיטת השוואת המקדמים

**מקרה 1** -  $y_1(x)$  או  $y_2(x)$  אינו חלק של  $p(x)$

| צורתו של אגף ימין $p(x)$                | צורתו של הפתרון הפרטי $y_p(x)$           |
|---|--|
| 1. פולינום מסדר $n$                     | 1. פולינום מסדר $n$                      |
| 2. $e^{\alpha x}$                       | 2. $ae^{\alpha x}$                       |
| 3. $\cos(\alpha x)$ או $\sin(\alpha x)$ | 3. $a \cos(\alpha x) + b \sin(\alpha x)$ |
| 4. מכפלה של מקרים 1,2,3                 | 4. מכפלה של צורות 1,2,3                  |

**מקרה 2** -  $y_1(x)$  או  $y_2(x)$  מהווה חלק של  $p(x)$  - את צורתו של  $y_p(x)$  עפ"י

הטבלה מכפילים ב- $x$  כל עוד  $y_1(x)$  או  $y_2(x)$  מהווה חלק של  $y_p(x)$  המתוקן.

לדוגמא – הפתרון הכללי למשוואה  $y'' - 8y' + 16y = 0$  הנו  $y = (C_1 + C_2 x)e^{4x}$

לכן את הפתרון הפרטי למשוואה  $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$  נחפש בצורה  $y_p = ax^2 e^{4x}$

**עקרון של סופרפוזיציה - אם הפתרון הפרטי למשוואה**  $ay'' + by' + cy = p_1(x)$

**הוא**  $y_{p1}(x)$  **והפתרון הפרטי למשוואה**  $ay'' + by' + cy = p_2(x)$  **הוא**  $y_{p2}(x)$  **אז**

**הפתרון הפרטי למשוואה**  $ay'' + by' + cy = p_1(x) + p_2(x)$  **הוא**  $y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$ .

### שיעורי בית

**תשובה**  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + (x+1)e^{-2x}$

1.  $y'' - y' - 2y = (4x-1)e^{-2x}$

**תשובה**  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + xe^x$

2.  $y'' + y' - 6y = (-4x+3)e^x$

**תשובה**  $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + (x^2 + 2x)e^{3x}$

3.  $y'' - 4y' + 3y = (4x+3)e^{3x}$

**תשובה**  $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 7x$

4.  $y'' + y' = 3x^2 + 1$

**תשובה**  $y = (3x^3 - 2x^2 + C_1 x + C_2)e^{-x}$

5.  $y'' + 2y' + y = (18x-4)e^{-x}$

**תשובה**  $y = \left( \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right) e^{4x}$

6.  $y'' - 8y' + 16y = (x+1)e^{4x}$

**תשובה**  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{6x} + e^{3x}(\cos x - \sin x)$

7.  $y'' - 9y' + 18y = e^{3x}(2\cos x + 4\sin x)$

**תשובה**  $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{x}{4} e^{-x} \cos 2x$

8.  $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x$

**תשובה**  $y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{2} - \frac{e^x}{2} + \frac{\cos x}{5} - \frac{2\sin x}{5}$

9.  $y'' - 3y' = 1 + e^x + \sin x + \cos x$

**תשובה**  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2}$

10.  $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$

דפים 456 – עמ' 6, תרגילים III, IV: 1-5, 8, חוברת – עמ' 16-17