שיעור 3

משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני המאפשרת הורדת סדר

$$F(x,y,y',y'')=0$$

מקרה 1 - $F(x,y',y'')=0$ - y לא מופיע. הצבה $y'=u(x)$ ואז $y''=u'(x)$

תרגילים

.1 $\begin{cases} x^5y''+3x^4y'=1 \\ y(1)=0, y'(1)=0 \end{cases}$ (תשובה $y=\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6}$)

.2 $\begin{cases} xy''+y'-(y')^2=0 \\ y(1)=4, y'(0)=1 \end{cases}$ - (תשובה $y=\ln|x+1|+4$)

מקרה 2 - $F(y,y',y'')=0$ - x לא מופיע. הצבה $y'=p(y)$ ואז $y''=p\cdot p'$

(שימו לב - $y'=\frac{dy}{dx}$ ואילו $p'=\frac{dp}{dy}$). לאחר ההצבה מתקבלת משוואה $G(y,p,p')=0$ בה

נוהגים ב- p כמו בפונקציה במשתנה y. פתרון המשוואה $H(y,p)=0$ מהווה משוואה

דיפרנציאלית מסדר ראשון $H(y,y')=0$ כאשר פתרונה הוא גם פתרון המשוואה הנתונה

תרגילים

.3 $\begin{cases} 3y'y''=2y \\ y(0)=1, y'(0)=1 \end{cases}$ (תשובה $y=\left(\frac{x}{3}+1\right)^3$)

.4 $\begin{cases} (y')^2=yy''+1 \\ y(0)=1, y'(0)=\sqrt{2} \end{cases}$ (תשובה $y+\sqrt{y^2+1}=\left(1+\sqrt{2}\right)e^x$)

מקרה 3 – משוואה הומוגנית $F(x,ky,ky',ky'')=k^m\cdot F(x,y,y',y'')=0$

ההצבה $y'=y\cdot z(x)$ הופכת את המשוואה למשוואה מסדר ראשון $F(x,z,z')=0$ ביחס

לפונקציה חדשה $z(x)$

דוגמא $xyy''+x(y')^2-yy'=0$

בדיקה $xkyky''+x(ky')^2-kyky'=k^2\left(xyy''+x(y')^2-yy'\right)=0$

הצבה $y'=y\cdot z(x)\Rightarrow y''=y'\cdot z(x)+y\cdot z'(x)=y\left(z^2+z'\right)$

$$xyy\left(z^2+z'\right)+x(yz)^2-yyz=0$$

$y^2\left(xz^2+xz'+xz^2-z\right)=0$, חשד לפתרון מיוחד $y=0$

$$xz'-z=-2xz^2\Rightarrow x\frac{z'}{z^2}-\frac{1}{z}=-2x$$

הצבה $\frac{1}{z}=u\Rightarrow-\frac{z'}{z^2}=u'\Rightarrow xu'+u=2x\Rightarrow(xu)'=2x\Rightarrow xu=x^2+c_1$

$$\frac{1}{z}=u=\frac{x^2+c_1}{x}\Rightarrow y'=yz=\frac{xy}{x^2+c_1}\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{xdx}{x^2+c_1}\Rightarrow\ln|y|=\ln\left(x^2+c_1\right)+c_2$$

תשובה $y=c_2\left(x^2+c_1\right)$. הפתרון $y=0$ אינו מיוחד(מתקבל אם מציבים $c_2=0$)

מקרה 4 – ידוע כי $y_1(x)$ הוא אחד הפתרונות הפרטיים של המשוואה.

במקרה הזה מחפשים את הפתרון הכללי בצורה $y=y_1\int u(x)dx$.

אזי $y'=y_1'\int udx+y_1u$ ו- $y''=y_1''\int udx+2y_1'u+y_1u'$ ולאחר ההצבה המשוואה הנתונה הופכת למשוואה מסדר ראשון $F(x,u,u')=0$ ביחס ל-$u(x)$

תרגילים

1. $\begin{cases}x^2\ln x\cdot y''-xy'+y=0\\ y_1(x)=x,\ y(e)=2,\ y'(e)=\frac{1}{e}\end{cases}$ (תשובה $y=\ln x+1$)
2. $xy''-y'+(1-x)y=0,\ y_1(x)=e^x$ (תשובה $y=c_1e^x+c_2(2x+1)e^{-x}$)

שיעורי בית

דפים 456 – עמ' 2, תרגילים 1-17, עמ' 5, תרגילים I: 1,2,

חוברת – עמ' 14-15, תרגילים 200,201,204,207-210,216,219,223

עמ' 20-21, תרגילים 271-276, 280-283

בוחן בית

1. פתור את המשוואה $yy''=(y')^2$ (תשובה – הפתרון הכללי $y=c_2e^{c_1x}$)

2. פתור את המשוואה $(x^3+y^3)dx-xy^2dy=0$

א. בתור משוואה הומוגנית

ב. בתור משוואת ברנולי

(תשובה – הפתרון הכללי $y^3=3x^3\ln|cx|$)

פתרון בוחן בית

1. $y'=p(y)\Rightarrow ypp'=p^2$

חשד לפתרון מיוחד $p=y'=0\Rightarrow y=c$

$$yp'=p\Rightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}\Rightarrow p=c_1y\Rightarrow\frac{dy}{y}=c_1dx\Rightarrow\ln|y|=c_1x+c_2\Rightarrow y=c_2e^{c_1x}$$

הפתרון $y=c$ אינו מיוחד(מתקבל אם מציבים $c_2=c,c_1=0$)

2א. $y=tx,\ dy=tdx+xdt\Rightarrow(x^3+t^3x^3)dx-x^3t^2(tdx+xdt)=0$

$$x^3dx-x^4t^2dt=0\Rightarrow\frac{dx}{x}=t^2dt\Rightarrow\ln|x|+c=\frac{t^3}{3}=\frac{y^3}{3x^3}\Rightarrow y^3=3x^3(\ln|x|+c)=3x^3\ln|cx|$$

2ב. $x^3+y^3-xy^2y'=0\Rightarrow y^2y'-\frac{1}{x}y^3=x^2\Rightarrow 3y^2y'-\frac{3}{x}y^3=3x^2$

$$z=y^3\Rightarrow z'-\frac{3}{x}z=3x^2\Rightarrow\frac{z'}{x^3}-\frac{3}{x^4}z=\frac{3}{x}\Rightarrow\left(\frac{z}{x^3}\right)'=\frac{3}{x}\Rightarrow\frac{y^3}{x^3}=3(\ln|x|+c)\Rightarrow\ldots$$