שיעור 2

משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר ראשון $y' + p(x)y = q(x)$

בשלב ראשון פותרים את **המשוואה ההומוגנית המתאימה** $y' + p(x)y = 0$

על ידי הפרדת משתנים

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$
$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$
$$\ln|y| = -\int p(x)dx + C$$
$$|y| = e^{-\int p(x)dx + C} = e^{C}e^{-\int p(x)dx}$$
$$y = \pm e^{C}e^{-\int p(x)dx} = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$$
$$y \cdot e^{\int p(x)dx} = C \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

על מנת לפתור את השמוואה $y' + p(x)y = q(x)$

מכפילים את שני אגפיה ב**גורם אינטגרציה** $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

(שימו לב כי $\mu'(x) = e^{\int p(x)dx}p(x) = \mu(x)p(x)$)

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = (\mu(x)y)' = q(x)\mu(x)$$
$$\mu(x)y = \int q(x)\mu(x)dx$$

ניתן להציג את הפתרון הכללי למשוואה $y' + p(x)y = q(x)$ על ידי

$$y = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

תרגילים

.1 $\begin{cases} y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{4\cos 4x}{x^3} \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$, .2 $\begin{cases} (x+1)y' - y = (x+1)^2 \sin 5x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$, .3 $\begin{cases} xy' = y + x^2 \sin x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$,

תשובות .1 $y = \dfrac{\sin 4x}{x^3}$, .2 $y = \dfrac{(x+1)}{5}(-\cos 5x + 1)$, .3 $y = -x\cos x + 3x$

משוואת ברנולי $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$

הופכת למשוואת ליניארית לאחר ההצבה $z = y^{1-\alpha}$

תרגילים

.1 $y' + \frac{2y}{x} = -x^4 e^x y^3$, *.2* $y' - y = \frac{xe^{2x}}{y}$, *.3* $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$,

תשובות .1 $\frac{1}{y^2} = x^4\left(2e^x + c\right)$, *.2* $y^2 = \left(x^4 + c\right)e^{2x}$ *,.3* $y = x^4 \ln^2(cx)$

שיעורי בית

חוברת – עמ' 3-4, תרגילים 1-38

דפים 123 – עמ' 15, תרגילים 1-12