

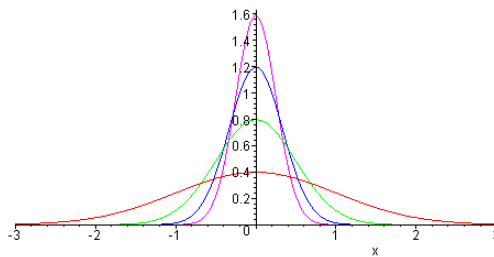
שיעור 11

התמרת לפלס של פונקציות מיוחדות

2. פונקציית הלם

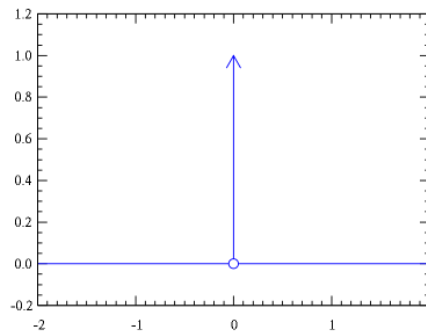
Gauss - פונקציית ההתפלגות הנורמאלית של $\delta_a(t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) dt = 1 \text{ מקיימת את התכונה}$$



פונקציית הלם של Dirac

$$\delta_a(t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \delta(t)$$



תכונות של פונקציית הלם

1) $\delta(t-c) = 0, t \neq c$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-c) dt = 1$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-c) f(t) dt = f(c)$

תרגיל 1 – הראה כי מתקיים

$$1) L[\delta(t)] = 1$$

$$2) L[\delta(t-c)] = e^{-cs}$$

$$3) L[f(t)\delta(t-c)] = f(c)e^{-cs}$$

תרגיל 2 – רשום את התמרת לפלס עבור הפונקציות הבאות

$$1) \delta(t-2\pi), 2) \cos t \cdot \delta(t-\pi), 3) t^2 \cdot \delta(t-2), 4) \sqrt{5t+6} \cdot \delta(t-2)$$

$$1) e^{-2\pi s}, 2) -e^{-\pi s}, 3) 4e^{-2s}, 4) 4e^{-2s} \quad \text{תשובות}$$

הערה – התמרת לפלס אינה חד חד ערכית במרחב של פונקציות מיוחדות

תרגיל 3 (עם תשובות) – פתור את המשוואות הבאות

$$1. \begin{cases} y'' + y = \delta(t-2\pi) \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}, y(t) = \cos t + u_{2\pi}(t) \sin t$$

$$2. \begin{cases} y'' - 3y' - 18y = \delta(t-1) \\ y(0)=2, y'(0)=3 \end{cases}, y(t) = e^{6t} + e^{-3t} + \frac{u_1(t)}{9} (e^{6(t-1)} - e^{-3(t-1)})$$

$$3. \begin{cases} y'' + 10y' + 25y = \delta(t-5) \\ y(0)=1, y'(0)=-1 \end{cases}, y(t) = (1+4t)e^{-5t} + u_5(t)(t-5)e^{-5(t-5)}$$

$$6. y'' + 2y' + y = \delta(t) + u_{2\pi}(t) \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y(t) = 2te^{-t} + u_{2\pi}(t)[1 - e^{-(t-2\pi)} - (t-2\pi)e^{-(t-2\pi)}]$$

$$7. y'' + \omega^2 y = \delta(t-0.25\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(t) = \cos \omega t - \frac{1}{\omega} u_{\frac{\pi}{4}}(t) \sin \omega t$$

$$8. y'' + 4y = 2\delta(t-0.25\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(t) = u_{0.25\pi}(t) \sin(2t-0.5\pi)$$

$$9. y'' + 4y = 4\delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(t) = u_{\pi/6}(t) \sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$$

שיעורי בית נוספים

חוברת – עמ' 25-26, תרגילים 306-313

3. קונבולוציה של 2 פונקציות

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-y)g(y)dy = \int_0^t f(y)g(t-y)dy$$

$$L\{f(t) * g(t)\} = L\{f(t)\} \cdot L\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$$

תרגיל 4 – חשב את התמרת לפלס של

1) $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2 \cos 3\tau d\tau$ 2) $f(t) = \int_0^t e^{3(t-\tau)} \sin 2\tau d\tau$ 3) $f(t) = \int_0^t (t-\tau)e^{4\tau} d\tau$

4) $f(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)\cos \tau d\tau$ 5) $f(t) = \int_0^t \sin 3(t-\tau)\cos 4\tau d\tau$

תשובות

1) $L\left(\int_0^t (t-\tau)^2 \cos 3\tau d\tau\right) = \frac{2}{s^2(s^2+9)}$ 2) $L\left(\int_0^t e^{3(t-\tau)} \sin 2\tau d\tau\right) = \frac{2}{(s-3)(s^2+4)}$

3) $L\left(\int_0^t (t-\tau)e^{4\tau} d\tau\right) = \frac{1}{s^2(s-4)}$ 4) $L\left(\int_0^t \sin(t-\tau)\cos \tau d\tau\right) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$

5) $L\left(\int_0^t \sin 3(t-\tau)\cos 4\tau d\tau\right) = \frac{3s}{(s^2+16)(s^2+9)}$

תרגיל 5 – חשב את התמרת לפלס ההפוכה של

$$F(s) = \frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$$

פתרון

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{a}{s^2+a^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) * L^{-1}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = t * \sin at = \int_0^t (t-\tau) \sin a\tau d\tau =$$

$$(t-\tau)(-\cos a\tau)\Big|_0^t - \frac{1}{a} \int_0^t \cos a\tau d\tau = 0 + \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} \sin a\tau \Big|_0^t = \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} \sin at$$

$$\begin{array}{l|l} u = t - \tau & du = -d\tau \\ dv = \sin a\tau d\tau & v = \frac{-1}{a} \cos a\tau \end{array} \quad \underline{L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{a}{s^2+a^2}\right) = \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} \sin at}$$

תרגיל 6 – חשב את התמרת לפלס ההפוכה של

1) $L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s-2)}\right\}$ 2) $L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)^2}\right\}$ 3) $L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)(s-1)}\right\}$

תשובות

$F(s)$	$\frac{8}{s(s-4)^2}$	$\frac{2}{s(s^2+4)^2}$	$\frac{2}{(s-3)(s-1)}$
$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$0.5((4t-1)e^{4t}+1)$	$-0.125(t \sin 2t + \cos 2t)$	$e^{3t} - e^t$

שיעורי בית נוספים

חוברת – עמ' 28-29