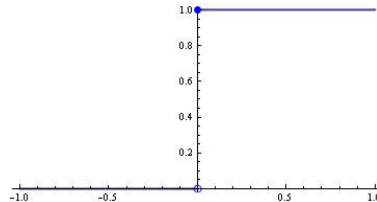


שיעור 10

התמרת לפלס של פונקציות מיוחדות

1. פונקציית מדרגה של Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}, \quad u_c(t) = u(t-c) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$



באמצעות פונקציית מדרגה ניתן "להפוך" פונקציות המוגדרת בקטע

לפונקציה המוגדרת לכל ערך ממשי

$$\begin{cases} f(t) \\ a < t \leq b \end{cases} = f(t)(u_a(t) - u_b(t))$$

ועל ידי כך לבטל פיצולים בהגדרת פונקציות

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & t < a \\ h(t), & t \geq a \end{cases} = g(t)(1 - u_a(t)) + h(t)u_a(t)$$

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & t < a \\ h(t), & a \leq t < b \\ p(t), & t \geq b \end{cases} = g(t)(1 - u_a(t)) + h(t)(u_a(t) - u_b(t)) + p(t)u_b(t)$$

תרגיל 1 הצג את הפונקציות הבאות ללא שימוש בתחום מפוצל באמצעות פונקציות מדרגה

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, \quad t < 4 \\ \sin 3t, \quad 4 \leq t < 7 \\ \sin 2t, \quad 7 \leq t < 10 \\ 0, \quad t \geq 7 \end{array} \right\} \cdot \tau, \quad \left\{ \begin{array}{l} e^t, \quad t < 2 \\ \sin t, \quad 2 \leq t < 6 \\ \cos t, \quad 6 \leq t < 7 \\ 2 + 3t, \quad t \geq 7 \end{array} \right\} \cdot \lambda, \quad \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad t < 5 \\ 2, \quad 5 \leq t < 15 \\ 3, \quad t \geq 15 \end{array} \right\} \cdot \beta, \quad \left\{ \begin{array}{l} t^2, \quad t < 3 \\ \ln t, \quad t \geq 3 \end{array} \right\} \cdot \alpha$$

תשובות

$$t^2(1 - u_3(t)) + \ln t \cdot u_3(t) \quad \alpha$$

$$e^t(1 - u_2(t)) + 2(u_5(t) - u_{15}(t)) + 3u_{15}(t) = 1 + u_5(t) + u_{15}(t) \quad \beta$$

$$e^t \cdot (1 - u_2(t)) + \sin t \cdot (u_2(t) - u_6(t)) + \cos t \cdot (u_6(t) - u_7(t)) + (2 + 3t)u_7(t) \quad \lambda$$

$$\sin 3t \cdot (u_4(t) - u_7(t)) + \sin 2t \cdot (u_7(t) - u_{10}(t)) \quad \tau$$

תרגיל 2 הראה כי מתקיים משפט הזזה השני

$$\begin{aligned} L[u_c(t)f(t-c)] &= e^{-cs}L[f(t)] \\ L[u_c(t)f(t)] &= e^{-cs}L[f(t+c)] \quad (c > 0) \end{aligned}$$

תרגיל 3 – רשום את התמרת לפלס עבור הפונקציות הבאות

$$1) f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ 4, & 2 \leq t < 4 \\ 2, & t \geq 4 \end{cases} \quad 2) f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases} \quad 3) f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 3 \\ -2t+8, & 3 \leq t < 4 \\ 0, & t \geq 4 \end{cases}$$

תשובות:

$$\begin{aligned} 1) & \frac{1+3e^{-2s}-2e^{-4s}}{s} & 2) & F(s) = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2} & 3) & F(s) = 2\frac{1-e^{-s}-e^{-3s}+e^{-4s}}{s^2} \end{aligned}$$

תרגיל 4 – רשום את התמרת לפלס הפוכה עבור הפונקציות הבאות

$$1) e^{-4s} \frac{5s+3}{s^2+2s-3}, 2) e^{-s} \frac{-3s+13}{s^2+6s+5}, 3) e^{-4s} \frac{s+2}{s^2-6s+34}$$

תשובות

$$\begin{aligned} 1) & u_4(t)(2e^{t-4} + 3e^{-3(t-4)}), 2) u_1(t)(4e^{-(t-1)} - 7e^{-5(t-1)}) \\ 3) & u_4(t)e^{3(t-4)}(\cos 3(t-4) + \sin 3(t-4)) \end{aligned}$$

תרגיל 5 – פתור את המשוואות הבאות

$$1) x'' + x = f(t), x(0) = 0, x'(0) = 1, f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1+t, & 1 \leq t < 3 \\ t, & t \geq 3 \end{cases}$$

$$2) y'' - 2y' + 2y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 0, f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y'' + y' = f(t) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}, f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ -1, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = f(t) \\ y(0) = 0, y'(0) = -1 \end{cases}, f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 3 \\ 6-t, & 3 \leq t < 6 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y'' - 6y' + 10y = f(t) \\ y(0) = 0, y'(0) = 5 \end{cases}, f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ e^t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$1) x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ t+1 - \cos(t-1), & 1 \leq t < 3 \\ t - \cos(t-1) + \cos(t-3), & t \geq 3 \end{cases}$$

$$2) y(t) = \begin{cases} 0.5(1 + e^t(\sin t - \cos t)), & 0 \leq t < 1 \\ 1 + 0.5e^t \left(\sin t - \cos t + \frac{\sin(t-1) - \cos(t-1)}{e} \right), & t \geq 1 \end{cases}$$

$$3) y(t) = -1 + t + e^{-t} - u_1(t)(t-2 + e^{-(t-1)}) + u_2(t)(-t+3 - e^{-(t-1)}) - u_3(t)(-t+4 - e^{-(t-3)})$$

$$4) y(t) = -\frac{3}{4} + \frac{t}{2} + \frac{3e^{-2t}}{4} - u_3(t) \left(t - \frac{9}{2} + 2e^{-(t-3)} - \frac{1}{2}e^{-2(t-3)} \right) - u_6(t) \left(\frac{t}{2} - \frac{15}{4} + e^{-(t-6)} - \frac{1}{4}e^{-2(t-6)} \right)$$

$$5) y(t) = 5e^{3t} \sin t + \frac{e}{5} u_1(t) (e^{t-1} - e^{3(t-1)} \cos(t-1) + 2e^{3(t-1)} \sin(t-1)) \\ - \frac{e^2}{5} u_2(t) (e^{t-2} - e^{3(t-2)} \cos(t-2) + 2e^{3(t-2)} \sin(t-2))$$

תרגיל 6 (עם תשובות) – פתור את המשוואות הבאות

$$1. \quad y'' + 2y' + y = 2(t-3)u_3(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1,$$

$$y(t) = (2+3t)e^{-t} + 2u_3(t)[t-5 + (t-1)e^{3-t}] = \begin{cases} (2+3t)e^{-t}, & 0 \leq t < 3 \\ (2+3t)e^{-t} + 2(t-1)e^{3-t} + 2t-10, & t \geq 3 \end{cases}$$

$$2. \quad y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 4 \\ 0, & t \geq 4 \end{cases}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2$$

$$y(t) = 0.25 \{ 11 \cos 2t - 4 \sin 2t + 1 - [1 - \cos 2(t-4)]u_4(t) \} =$$

$$y(t) = \begin{cases} 0.25(11 \cos 2t - 4 \sin 2t + 1), & 0 \leq t < 4 \\ 0.25(11 \cos 2t - 4 \sin 2t + \cos 2(t-4)), & t \geq 4 \end{cases}$$

$$3. \quad y'' + y = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ \cos t, & \pi \leq t < \infty \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

$$y(t) = 0.5 \left[(2-t) \cos t - \sin t + u_\pi(t) \left((\pi-t) \cos t + (t-\pi-1) \sin t \right) \right] = \\ = \begin{cases} 0.5 \left((2-t) \cos t - \sin t \right), & 0 \leq t < \pi \\ 0.5 \left[(2+\pi-2t) \cos t - (2+\pi-t) \sin t \right], & \pi \leq t < \infty \end{cases}$$

$$4. \quad y'' + y = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < 0.5\pi \\ 0, & t \geq 0.5\pi \end{cases}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1$$

$$y(t) = 3 \cos t + (0.5t-1) \sin t + 0.5u_{0.5\pi}(t) \left((t-0.5\pi) \sin t - \cos t \right) = \\ = \begin{cases} 3 \cos t, & 0 \leq t < 0.5\pi \\ 2.5 \cos t + (t-1-0.25\pi) \sin t, & \pi \leq t < \infty \end{cases}$$

$$5. \quad y'' - 2y' + y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < \infty \end{cases}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

$$y(t) = e^t(1-2t) - 1 + [e^{t-1}(3-t) - 1 - t]u_1(t) + [e^{t-1}(7-2t) - 1 - t]u_2(t) = \\ = \left\{ \begin{aligned} &(-1 + e^t(1-2t)) \text{ if } 0 \leq t < 1, \\ &(-2 - t + e^t(1-2t) + e^{t-1}(3-t)) \text{ if } 1 \leq t < 2 \\ &(-3 - 2t + e^t(1-2t) + e^{t-1}(3-t) + e^{t-2}(7-2t)) \text{ if } t \geq 2 \end{aligned} \right\}$$

תרגיל 7 (עם תשובות) – פתור את המשוואות הבאות

$$1. \quad y'' + y = \begin{cases} 1, & 0 < t < 0.5\pi \\ 0, & 0.5\pi \leq t < \infty \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y(t) = 1 - \cos t + \sin t - u_{0.5\pi}(t)(1 - \sin t) = \begin{cases} 1 - \cos t + \sin t, & 0 \leq t < \pi/2 \\ -\cos t - 2\sin t, & t \geq \pi/2 \end{cases}$$

$$2. \quad y'' + 4y = \sin t - u_\pi(t)\sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$y(t) = \frac{2\sin t - \sin 2t - u_\pi(t)(2\sin t + \sin 2t)}{6} = \frac{1}{6} \cdot \begin{cases} 2\sin t - \sin 2t, & 0 \leq t < \pi \\ -2\sin 2t, & t \geq \pi \end{cases}$$

$$3. \quad y'' + 4y = t - u_{0.5\pi}(t)(t - 0.5\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$y(t) = \frac{2t - \sin 2t + (\pi - 2t - \sin 2t)u_{0.5\pi}(t)}{8} = \frac{1}{8} \cdot \begin{cases} 2t - \sin 2t, & 0 \leq t < \pi/2 \\ -2\sin 2t + \pi, & t \geq \pi \end{cases}$$

$$4. \quad y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < \infty \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y(t) = t - u_1(t)[t - 1 - \sin(t-1)]$$

$$5. \quad y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < \infty \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y(t) = \frac{1}{4} \left\{ 2t - 3 + 8e^{-t} - 5e^{-2t} + [e^{2\pi-2t}(3-2\pi) + 4e^{\pi-t}(\pi-2) + 5-2t]u_\pi(t) \right\}$$

שיעורי בית נוספים

חוברת – עמ' 24, תרגילים 298-305, עמ' 27, תרגילים 324-332