שיעור 1

1. משוואה דיפרנציאלית מסדר n

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

דוגמא 1א - משוואה דיפרנציאלית מסדר 1 (חדו"א)

$$y' = 3x^2 - 2x + 3$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 3$$
$$dy = \left(3x^2 - 2x + 3\right)dx$$
$$\int dy = \int \left(3x^2 - 2x + 3\right)dx$$
$$y = x^3 - x^2 + 3x + C$$

(**הפתרון הכללי** למשוואה)

דוגמא 1ב - משוואה דיפרנציאלית מסדר 1 עם תנאי ההתחלה (בעיית קושי)

$$\begin{cases} y' = 3x^2 - 2x + 3 \\ y(0) = 12 \end{cases}$$

בפתרון הכללי $y = x^3 - x^2 + 3x + C$ נציב $y(0) = 12$ ונקבל $C = 12$

הפתרון הפרטי $y = x^3 - x^2 + 3x + 12$

דוגמא 2 - משוואה דיפרנציאלית מסדר 2 עם תנאיי ההתחלה (בעיית קושי)

$$\begin{cases} y'' = 6x + 2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

סדר של משוואה דיפרנציאלית, פתרון כללי ופתרון פרטי

פתרון מיוחד

פתרון פרטי למשוואה שאינו מתקבל מהפתרון הכללי על ידי בחירה של קבוע האינטגרציה

(מצב זה יכול להיות תלוי בצורת כתיבת הפתרון הכללי)

תרגילים

1. הראה כי פונקציה $y = \frac{\sin x}{x}$ מהווה פתרון פרטי למשוואה $xy'' + 2y' + xy = 0$

2. הראה כי פונקציה $y = \frac{e^x}{x}$ מהווה פתרון פרטי למשוואה $y'' + \frac{2}{x}y' - y = 0$

3. הראה כי פונקציה $y(x)$ המוגדרת בצורה סתומה $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = \sqrt{10}$

מהווה פתרון פרטי למשוואה $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

4. הראה כי פונקציה $y(x)$ המוגדרת בצורה סתומה $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=5$

מהווה פתרון פרטי למשוואה $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

5. הראה כי פונקציה $\arcsin x$ מהווה פתרון לבעיית קושי $\begin{cases} dx-\sqrt{1-x^2}dy=0 \\ y(1)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

6. הראה כי פונקציה $y(x)=x\ln(1+\ln x)$ מהווה פתרון לבעיית קושי $\begin{cases} y'=e^{-\frac{y}{x}}+\frac{y}{x} \\ y(1)=0 \end{cases}$

7. הראה כי פונקציה $y(x)$ המוגדרת בצורה סתומה $x^2-2xy+2y^2=C$

מהווה פתרון כללי למשוואה $y'=\frac{x-y}{x-2y}$

8. הראה כי פונקציה $y=(x+c)^4+1$ מהווה פתרון כללי ופונקציה $y=1$ מהווה פתרון מיוחד

למשוואה $y'=4(y-1)^{\frac{3}{4}}$

2. משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים

משוואה ההופכת למשוואה דיפרנציאלית $u(y)dy=v(x)dx$ על ידי כינוס ביטויים והעברת אגפים בלבד. אזי הפתרון הכללי למשוואה יהיה

$$\int u(y)dy=\int v(x)dx+C$$

תרגילים

9. מצא את הפתרון הכללי למשוואה $y'=2x+y-3$. תשובה $2x+y-1=Ce^x$

10. מצא את הפתרון הכללי למשוואה $\ln(x+y)(y'+1)=x+y$. תשובה $\ln^2(x+y)=2x+C$

11. פתור את בעיית קושי $\begin{cases} xy'=\sqrt{1-y^2} \\ y(1)=1 \end{cases}$. תשובה $y=\sin\left(\ln|x|+\frac{\pi}{2}\right)$

12. פתור את בעיית קושי $\begin{cases} x(y^2+1)dx+y(x^2+1)dy=0 \\ y(0)=0 \end{cases}$. תשובה $(y^2+1)(x^2+1)=1$

13. פתור את בעיית קושי $\begin{cases} y'=e^{-2x-3y}+e^{-2x} \\ y(0)=0 \end{cases}$. תשובה $y=\frac{1}{3}\ln\left|-\frac{3}{2}e^{-2x}+3x+\frac{5}{2}\right|$

3. משוואה דיפרנציאלית הומוגנית

ניתנת לכתיבה בצורת $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ והופכת למשוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים על ידי ההצבה $t(x) = \frac{y}{x}$. אזי $y = tx, y' = t + t'x, dy = tdx + xdt$.

תרגילים

14. $(3xy^2 + 2x^3)dx + y^3dy = 0$. תשובה $y^2 + 2x^2 = c\sqrt{y^2 + x^2}$

15. $\begin{cases} xyy' = \frac{x^2}{2}e^{-\frac{y^2}{x^2}} + y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$. תשובה $e^{\frac{y^2}{x^2}} = \ln|ex|$

משוואה $y' = \varphi\left(\frac{ax + by + c}{ax + by + d}\right)$ הופכת להומוגנית על ידי ההצבה $z = ax + by$.

משוואה $y' = \varphi\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ במקרה של $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ הופכת להומוגנית על ידי ההצבה $\begin{cases} s = x - x_0 \\ t = y - y_0 \end{cases}$ כאשר (x_0, y_0) הנו פתרון המערכת $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$.

תרגילים

16. $y' = \frac{x + y + 1}{-2x - 2y + 1}$. תשובה $x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = c$

17. $y' = \frac{-4x + 6y - 26}{9x - y + 21}$. תשובה $y - 4x - 11 = c(y + x - 1)^2$. פתרון מיוחד $y = -x + 1$