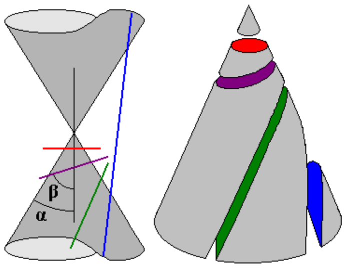
חדו"א 2 שבוע 5

1. קווים במישור

כל משוואה ליניארית $ax+by+c=0$ $\left(a^2+b^2\neq 0\right)$ מגדירה קו ישר במישור

כל משוואה מסדר שני $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ $\left(a^2+b^2+c^2\neq 0\right)$

מגדירה אחד מחתכי חרוט – מעגל, אליפסה, היפרבולה או פרבולה



1) מעגל - אוסף נקודות שמרחקן(רדיוס) מנקודה מסוימת(המרכז) קבוע

משוואת המעגל עם מרכז בראשית הצירים ורדיוס R

$$x^2+y^2=R^2 \quad (R>0)$$

משוואת המעגל עם מרכז בנקודה $O(x_0,y_0)$ ורדיוס R

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \quad (R>0)$$

תרגילים הראה כי המשוואות הבאות מגדירה מעגל ומצא את מרכזו ואת רדיוסו

1) $x^2+y^2=1$ 2) $x^2+2x+y^2-168=0$ 3) $x^2+y^2-6y-40=0$
4) $x^2+18x+y^2-16y+129=0$ 5) $x^2-2x+y^2+20y+52=0$
6) $x^2+8x+y^2-14y-131=0$ 7) $x^2+6x+y^2+2y-134=0$

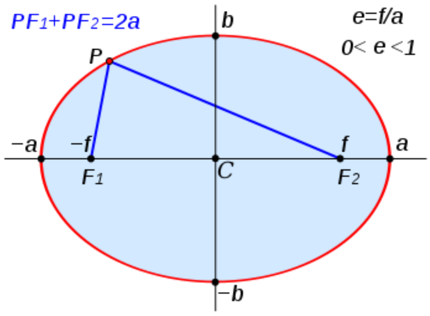
תשובות

1) $O(0,0),\ R=1$ 2) $O(-1,0),\ R=13$ 3) $O(0,3),\ R=7$ 4) $O(-9,8),\ R=4$
5) $O(1,-10),\ R=7$ 6) $O(-4,7),\ R=14$ 7) $O(-3,-1),\ R=12$

2) אליפסה - אוסף נקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות

במישור(המוקדים) קבוע. משוואת האליפסה עם מרכז בראשית הצירים וחצי

אורך של הצירים a,b היא $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$



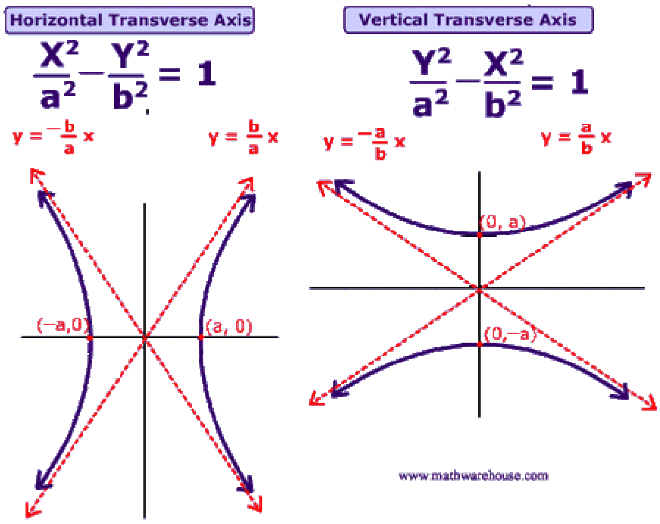
משוואת האליפסה עם מרכז בנקודה (x_0,y_0) וחצי אורך של הצירים a,b היא

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$$

יחס $e=\frac{f}{a}$ נקרא אקסצנטריות של אליפסה(במעגל $e=0$ או $a=b=R$)

תרגיל – שרטט את האליפסות א) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ב) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ ג) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+5)^2}{4}=1$

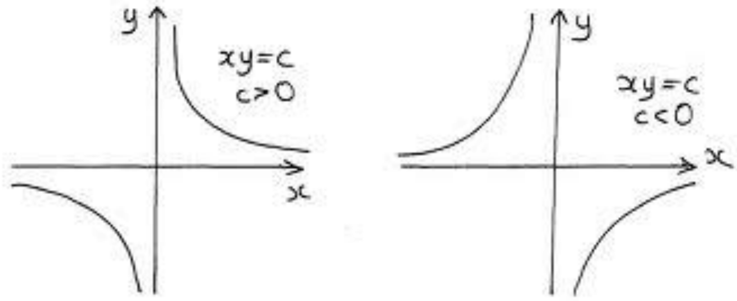
3) היפרבולה - אוסף נקודות עם הפרש קבוע בין המרחקים ביניהן לשתי נקודות קבועות(המוקדים). משוואת ההיפרבולה עם מרכז בראשית הצירים וחצי אורכי הצירים a ו- b (המקבילים למערכת הצירים) $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=\pm1$



משוואת ההיפרבולה עם מרכז בנקודה (x_0, y_0) וחצי אורכי הצירים a ו- b

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=\pm1$$ (המקבילים למערכת הצירים)

משוואת היפרבולה נוספת היא $xy=c$ עם אסימפטוטות $x=0,\ y=0$

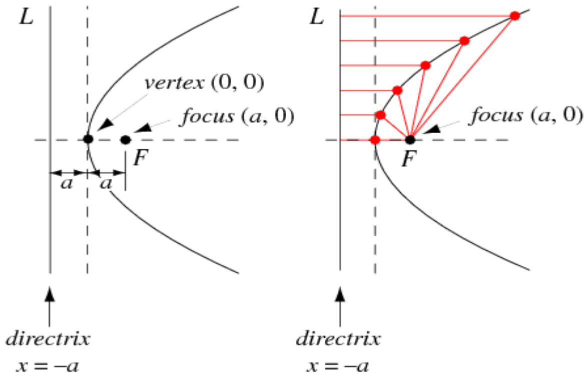


$(x-x_0)(y-y_0)=c$ עם אסימפטוטות $x=x_0,\ y=y_0$

תרגיל – שרטט את ההיפרבולות

א) $x^2-y^2=1$, ב) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, ג) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, ד) $(x-3)^2-(y+5)^2=1$

4) פרבולה - אוסף נקודות שמרחקן מנקודה נתונה(המוקד) שווה למרחקן מישר נתון (המדריך) משוואות פרבולה עם קדקוד בראשית הצירים ומוקד בנקודות $(0,\pm a)$ או $(\pm a,0)$ היא $y^2=4ax$ או $x^2=4ay$ $(a>0)$



משוואות פרבולה עם קדקוד בנקודה (x_0,y_0) הן

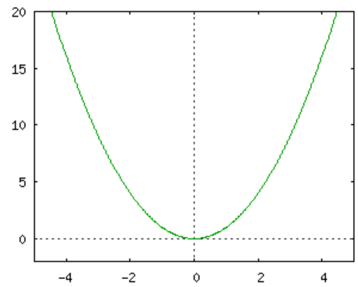
$$(y-y_0)^2=4a(x-x_0) \text{ או } (x-x_0)^2=4a(y-y_0)$$

תרגיל – שרטט את הפרבולות

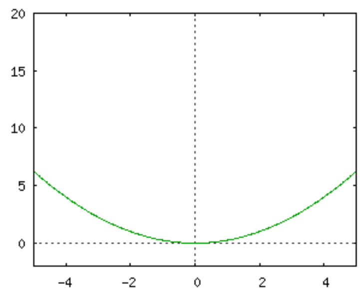
א) $x^2=y$, ב) $x^2=4y$, ג) $x^2=-4y$ ד) $y^2=x$, ה) $y^2=-4x$

תשובות

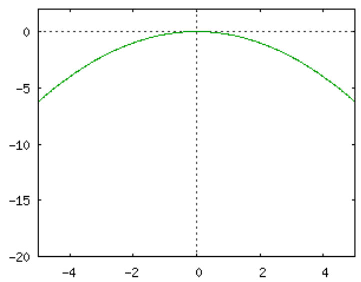
א)



ב)



ג)

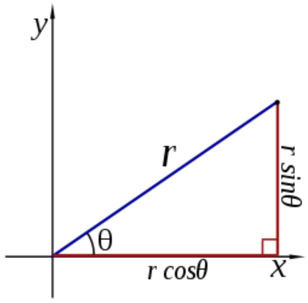


ד) לסובב את א ה) לסובב את ג

2. קואורדינאטות קוטביות

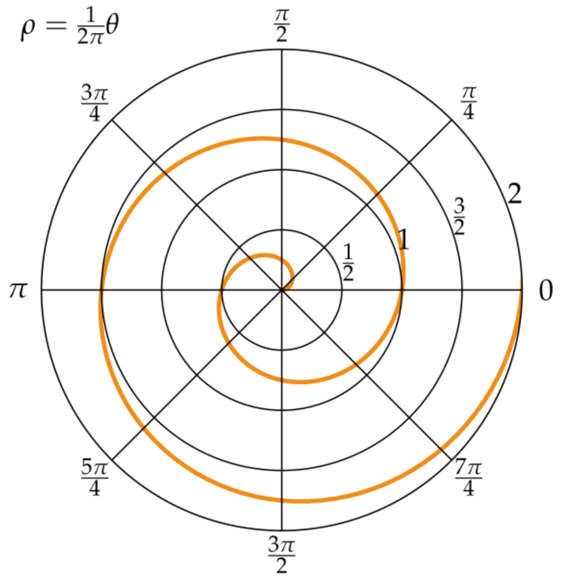
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r \ge 0 \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



שרטוט פונקציות בקואורדינאטות קוטביות - דוגמאות

1. ספירלה של ארכימדס

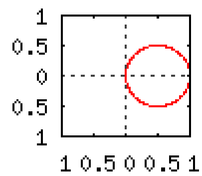


2. שושן פולארי(הפרח של גראנדי) $r = a\cos(n\theta + \theta_0)$

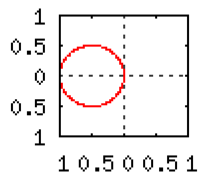
מקרים שכיחים $r = \pm a\cos(n\theta)$ או $r = \pm a\sin(n\theta)$

דוגמאות

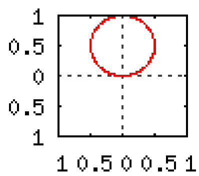
$r = \cos(\theta)$



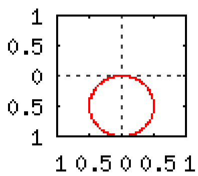
$r = -\cos(\theta)$



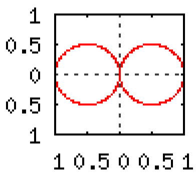
$r = \sin(\theta)$



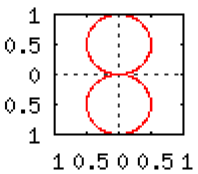
$r = -\sin(\theta)$



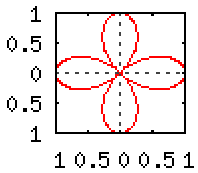
$r = |\cos(\theta)|$



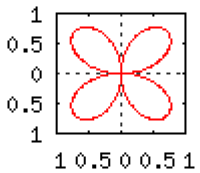
$r = |\sin(\theta)|$



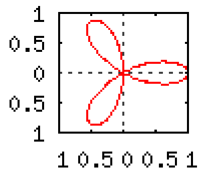
$$r=\cos(2\theta)$$
$$r=-\cos(2\theta)$$
$$r=|\cos(2\theta)|$$



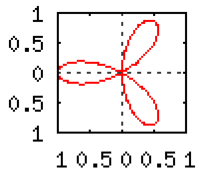
$$r=\sin(2\theta)$$
$$r=-\sin(2\theta)$$
$$r=|\sin(2\theta)|$$



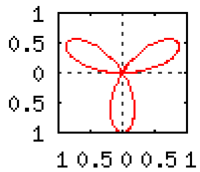
$$r=\cos(3\theta)$$



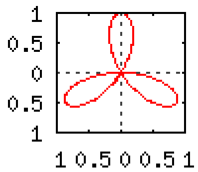
$$r=-\cos(3\theta)$$



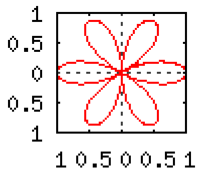
$$r=\sin(3\theta)$$



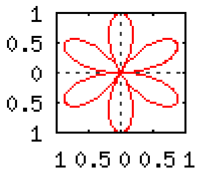
$$r=-\sin(3\theta)$$



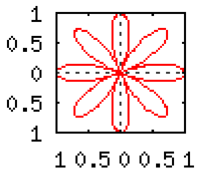
$$r=|\cos(3\theta)|$$



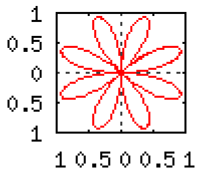
$$r=|\sin(3\theta)|$$



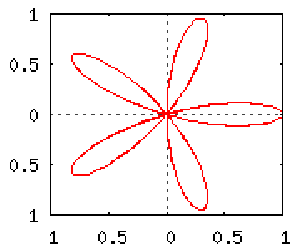
$$r=\cos(4\theta)$$
$$r=-\cos(4\theta)$$
$$r=|\cos(4\theta)|$$



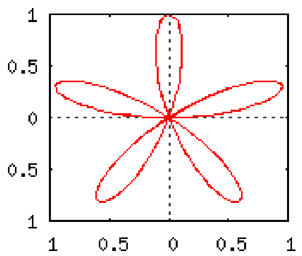
$$r=\sin(4\theta)$$
$$r=-\sin(4\theta)$$
$$r=|\sin(4\theta)|$$



$$r=\cos(5\theta)$$



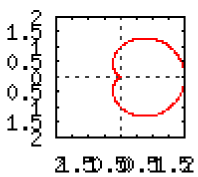
$$r=\sin(5\theta)$$



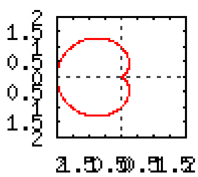
3. קרדיואידה $r=a(1+\cos(n\theta+\theta_0))$

דוגמאות

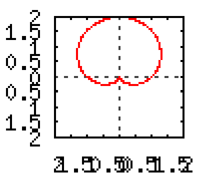
$$r=1+\cos\theta$$



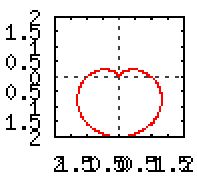
$$r=1-\cos\theta$$



$$r=1+\sin\theta$$



$$r=1-\sin\theta$$



2. משטחים במרחב

משוואה ליניארית $ax+by+cz+d=0$ $\left(a^2+b^2+c^2\neq 0\right)$ מגדירה מישור במרחב

משוואה מסדר שני $ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz+j=0$

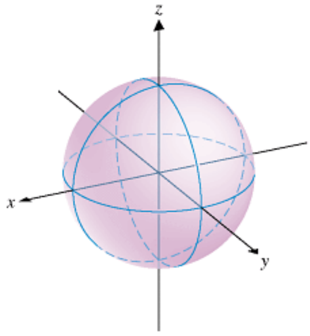
$\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\neq 0\right)$ מגדירה משטחים מסדר שני (יריעות דו מימדיות)

1) פני כדור (ספירה)

אוסף נקודות שמרחקן(רדיוס) מנקודה מסוימת, המרכז, קבוע

משוואת פני כדור עם מרכז בראשית הצירים ורדיוס R

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$



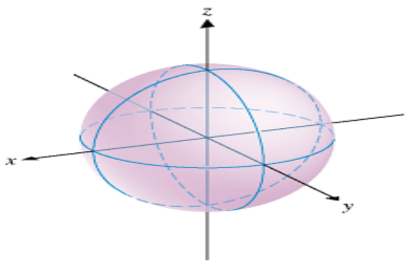
משוואת פני כדור עם מרכז בנקודה $O\left(x_0,y_0,z_0\right)$ ורדיוס R

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2=R^2$$

2) אליפסויד(ביצה)

משוואת אליפסויד עם מרכז עם מרכז בראשית הצירים וחצי אורכי הצירים a,b,c

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$



משוואת אליפסויד עם מרכז בנקודה $O\left(x_0,y_0,z_0\right)$ וחצי אורכי הצירים a,b,c

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{c}\right)^2=1$$

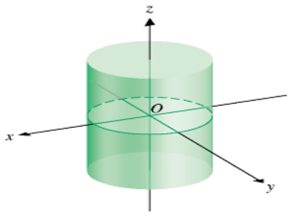
הערה

ניתן להגדיר פני כדור בתור מקרה פרטי של אליפסויד כאשר $a=b=c=R$

3) גליל(cylinder)

במשוואות משטח גלילי חסר משתנה – המשטח מקביל לציר של המשתנה החסר

משוואת גליל רגיל עם ציר הZ באמצע $x^2+y^2=R^2$



משוואת גליל אליפטי עם ציר (x_0,y_0,z) באמצע

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$$

משוואת גליל אליפטי עם ציר (x_0,y,z_0) באמצע

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{b}\right)^2=1$$

משוואת גליל אליפטי עם ציר (x,y_0,z_0) באמצע

$$\left(\frac{y-y_0}{a}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{b}\right)^2=1$$

משוואת גליל היפרבולי עם ציר (x_0,y_0,z) באמצע

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=\pm1$$

משוואת גליל היפרבולי עם ציר (x_0,y,z_0) באמצע

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{z-z_0}{b}\right)^2=\pm1$$

משוואת גליל היפרבולי עם ציר (x,y_0,z_0) באמצע

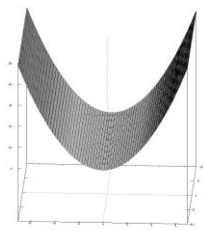
$$\left(\frac{y-y_0}{a}\right)^2-\left(\frac{z-z_0}{b}\right)^2=\pm1$$

משוואת גליל כללי המקביל לציר הZ $F(x,y)=0$

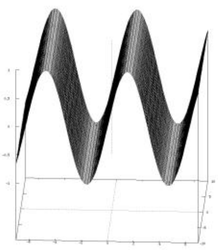
משוואת גליל כללי המקביל לציר הY $F(x,z)=0$

משוואת גליל כללי המקביל לציר הX $F(y,z)=0$

דוגמאות - גליל פרבולי $z=x^2$



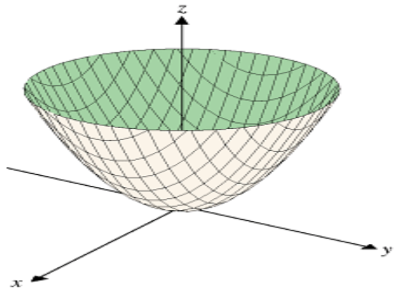
גליל בצורת סינוס $z=\sin x$



4) פרבולויד(פרבולויד אליפטי)

משוואות פרבולויד עם קדקוד בראשית הצירים וציר סיבוב מקביל לציר הZ

$$z=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2$$ (מכוון כלפי מעלה)



$$z=-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2$$ (מכוון כלפי מטה)

משוואת פרבולויד אליפטי עם קדקוד בנקודה (x_0,y_0,z_0) וציר סיבוב מקביל לציר הZ

$$\pm(z-z_0)=\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2$$

משוואת פרבולויד אליפטי עם קדקוד בנקודה (x_0,y_0,z_0) וציר סיבוב מקביל לציר הY

$$\pm(y-y_0)=\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{b}\right)^2$$

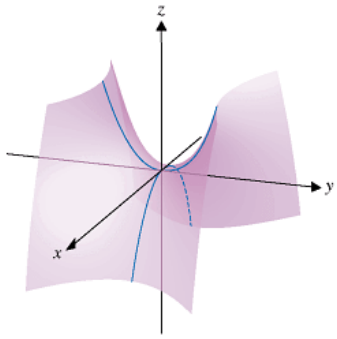
משוואת פרבולויד אליפטי עם קדקוד בנקודה (x_0,y_0,z_0) וציר סיבוב מקביל לציר הX

$$\pm(x-x_0)=\left(\frac{y-y_0}{a}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{b}\right)^2$$

5) פרבולויד היפרבולי

משוואת פרבולויד אליפטי עם נקודת אוכף $(0,0,0)$ ה"יושבת" על המישור XY

$$z = \pm\left(\frac{x}{a}\right)^2 \mp \left(\frac{y}{b}\right)^2$$ לדוגמא $$z = -x^2 + y^2$$



משוואת פרבולויד אליפטי עם נקודת אוכף (x_0, y_0, z_0) ה"יושבת" על המישור XY

$$\pm(z - z_0) = \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2$$

משוואת פרבולויד אליפטי עם נקודת אוכף (x_0, y_0, z_0) ה"יושבת" על המישור XZ

$$\pm(y - y_0) = \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{z - z_0}{b}\right)^2$$

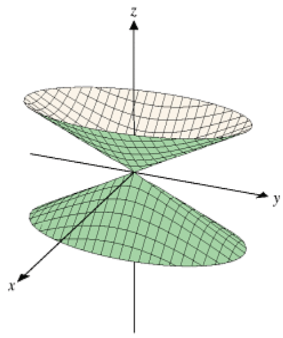
משוואת פרבולויד אליפטי עם נקודת אוכף (x_0, y_0, z_0) ה"יושבת" על המישור YZ

$$\pm(x - x_0) = \left(\frac{y - y_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{z - z_0}{b}\right)^2$$

6) חרוט וחרוט אליפטי (elliptic cone)

חרוט אליפטי עם ציר הסיבוב מקביל לציר הZ

$$(z - z_0)^2 = \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2$$ לדוגמא $$z^2 = x^2 + y^2$$



חרוט אליפטי עם ציר הסיבוב מקביל לציר הY

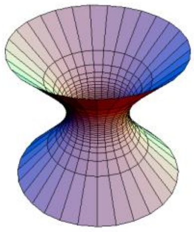
$$(y - y_0)^2 = \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{b}\right)^2$$

חרוט אליפטי עם ציר הסיבוב מקביל לציר הX

$$(x - x_0)^2 = \left(\frac{y - y_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{b}\right)^2$$

7) היפרבולויד חד יריעתי

משוואת היפרבולויד חד יריעתי עם ציר ה-Z באמצע $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$



עם ציר ה-Y באמצע $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$

עם ציר ה-X באמצע $-\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$

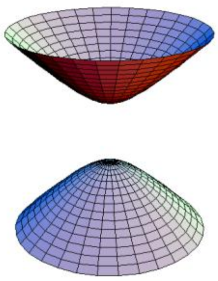
עם ציר (x_0,y_0,z) באמצע $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2-\left(\frac{z-z_0}{c}\right)^2=1$

עם ציר (x_0,y,z_0) באמצע $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{c}\right)^2=1$

עם ציר (x,y_0,z_0) באמצע $-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{c}\right)^2=1$

8) היפרבולויד דו יריעתי

משוואת היפרבולויד דו יריעתי עם ציר ה-Z באמצע $-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$



עם ציר ה-Y באמצע $-\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$

עם ציר ה-X באמצע $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$

עם ציר (x_0,y_0,z) באמצע $-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{c}\right)^2=1$

עם ציר (x_0,y,z_0) באמצע $-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2-\left(\frac{z-z_0}{c}\right)^2=1$

עם ציר (x,y_0,z_0) באמצע $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2-\left(\frac{z-z_0}{c}\right)^2=1$