חדו"א 2 שבוע 4 מבוא לפונקציות וקטוריות

הצגה פרמטרית של עקומה במישור

$$x = x(t), y = y(t)$$

דוגמא 1

$$x = \cos t, y = \sin t, 0 \le t < 2\pi$$

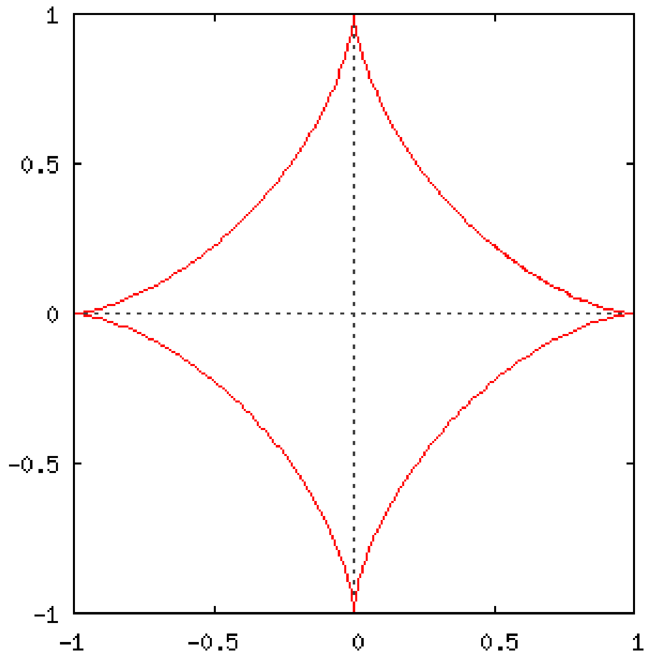
מגדירה מעגל $x^2 + y^2 = 1$

צורה וקטורית להצגה פרמטרית של עקומה במישור (תנועת חלקיק במישור)

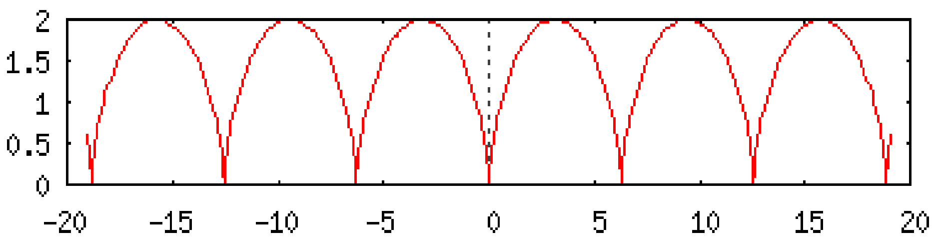
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

בדוגמא 1 $\mathbf{r}(t) = \cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j}, 0 \le t < 2\pi$

דוגמא 2 $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t \cdot \mathbf{i} + \sin^3 t \cdot \mathbf{j},\ 0 \le t < 2\pi$



דוגמא 3 $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t) \cdot \mathbf{i} + (1 - \cos t) \cdot \mathbf{j}, -15 \le t < 15$



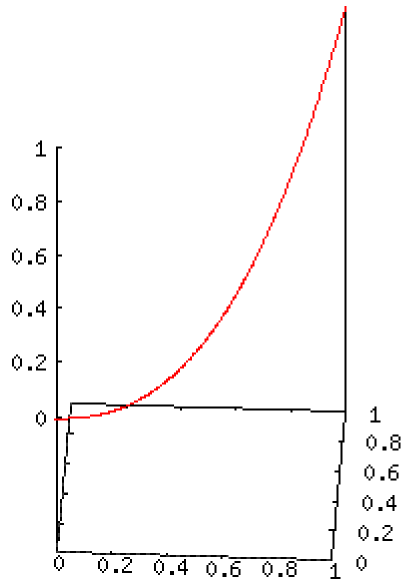
*צורה וקטורית להצגה פרמטרית של עקומה במרחב (**תנועת חלקיק** במרחב)*

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

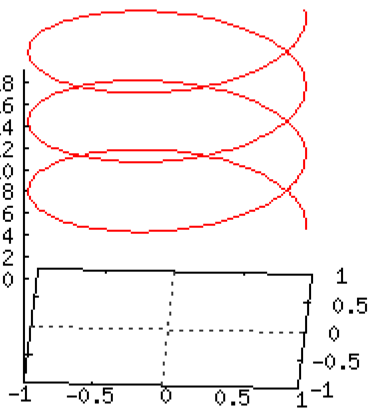
***מרחק** החלקיק מראשית הצירים*

$$|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{x^2(t)\mathbf{i} + y^2(t)\mathbf{j} + z^2(t)\mathbf{k}}$$

דוגמא 4 $\mathbf{r}(t)=t\cdot\mathbf{i}+t^2\cdot\mathbf{j}+t^3\cdot\mathbf{k},0\le t<1$



דוגמא 5 $\mathbf{r}(t)=\cos t\cdot\mathbf{i}+\sin t\cdot\mathbf{j}+t\cdot\mathbf{k},0\le t<6\pi$



למשל בנקודת הזמן $t=\frac{\pi}{4}$ החלקיק נמצא בנקודה $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)$

במרחק $\sqrt{1+\frac{\pi^2}{16}}=\left|\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|$ מראשית הצירים

נגזרת של פונקציה וקטורית

$\mathbf{r}'(t)=\mathbf{v}(t)=x'(t)\mathbf{i}+y'(t)\mathbf{j}+z'(t)\mathbf{k}$ (**מהירות** החלקיק)

$\mathbf{r}''(t)=\mathbf{a}(t)=x''(t)\mathbf{i}+y''(t)\mathbf{j}+z''(t)\mathbf{k}$ (**תאוצת** החלקיק)

המשך דוגמא 5 $\mathbf{r}(t)=\cos t\cdot\mathbf{i}+\sin t\cdot\mathbf{j}+t\cdot\mathbf{k}$

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)=-\sin t\cdot\mathbf{i}+\cos t\cdot\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t)=\mathbf{r}''(t)=-\cos t\cdot\mathbf{i}-\sin t\cdot\mathbf{j}$$

למשל בנקודת הזמן $t=\dfrac{\pi}{4}$

מהירות החלקיק $\mathbf{v}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ וגודלה $\left|\mathbf{v}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\sqrt{2}$

תאוצת החלקיק $\mathbf{a}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ וגודלה $\left|\mathbf{a}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=1$

משוואת **הישר המשיק** לעקומת התנועה $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$

בנקודה בה $t=t_0$ היא $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t_0)+\mathbf{r}'(t_0)\cdot t$ או בצורה מפורטת

$$\begin{cases}x=x(t_0)+x'(t_0)\cdot t\\ y=y(t_0)+y'(t_0)\cdot t\\ z=z(t_0)+z'(t_0)\cdot t\end{cases}$$

וקטור היחידה המשיק לעקומת התנועה $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$

בנקודה בה $t=t_0$ הוא $\dfrac{\mathbf{r}'(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0)|}$

המשך דוגמא 5 משוואת הישר המשיק לעקומת התנועה

$$\mathbf{r}(t)=\cos t\cdot\mathbf{i}+\sin t\cdot\mathbf{j}+t\cdot\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)=-\sin t\cdot\mathbf{i}+\cos t\cdot\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

בנקודת הזמן $t=\dfrac{\pi}{4}$ היא

$$\begin{cases}x=x(t_0)+x'(t_0)\cdot t=1\\ y=y(t_0)+y'(t_0)\cdot t=t\\ z=z(t_0)+z'(t_0)\cdot t=t\end{cases}$$

ווקטור היחידה המשיק לעקומת התנועה בנקודה הזו הוא $\dfrac{\mathbf{r}'(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0)|}=\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

אינטגרל של פונקציה וקטורית

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \int x(t)dt\mathbf{i} + \int y(t)dt\mathbf{j} + \int z(t)dt\mathbf{k}$$

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \int_a^b x(t)dt\mathbf{i} + \int_a^b y(t)dt\mathbf{j} + \int_a^b z(t)dt\mathbf{k}$$

דוגמא 6 תאוצת החלקיק מוגדרת על ידי

$$\mathbf{r}''(t) = \cos \pi t \cdot \mathbf{i} + 4\sin 2\pi t \cdot \mathbf{j} + 6t \cdot \mathbf{k}$$

המיקום ההתחלתי של החלקיק הוא $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

המהירות ההתחלתית של החלקיק היא $\mathbf{v}(0) = \mathbf{r}'(0) = -\frac{2}{\pi}\mathbf{j}$

מצא את משוואת התנועה של החלקיק

פתרון

$$\mathbf{v}(t) = \int \cos \pi t dt\mathbf{i} + \int 4\sin 2\pi t dt\mathbf{j} + 6tdt\mathbf{k} =$$

$$\left(\frac{\sin \pi t}{\pi} + C_1\right)\mathbf{i} - \left(\frac{2\cos 2\pi t}{\pi} + C_2\right)\mathbf{j} + \left(3t^2 + C_3\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(0) = C_1\mathbf{i} - \left(\frac{2}{\pi} + C_2\right)\mathbf{j} + C_3\mathbf{k} = -\frac{2}{\pi}\mathbf{j} \Rightarrow C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

$$\mathbf{r}(t) = \int \frac{\sin \pi t}{\pi}dt\mathbf{i} - \frac{2\cos 2\pi t}{\pi}dt\mathbf{j} + 3t^2 dt\mathbf{k} =$$

$$\left(-\frac{\cos \pi t}{\pi^2} + C_1\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi^2} + C_2\right)\mathbf{j} + \left(t^3 + C_3\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(0) = \left(-\frac{1}{\pi^2} + C_1\right)\mathbf{i} - C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k} = \mathbf{0} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\pi^2}, C_2 = C_3 = 0$$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1 - \cos \pi t}{\pi^2}\mathbf{i} - \frac{\sin 2\pi t}{\pi^2}\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$ תשובה

תרגיל הוכח כי

1) $\left(a\mathbf{r}_1(t) + b\mathbf{r}_2(t)\right)' = a\mathbf{r}_1'(t) + b\mathbf{r}_2'(t)$

2) $\left(\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)\right)' = \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t)$

3) $\left(\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)\right)' = \mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t)$

4) $\left(f(t) \cdot \mathbf{r}(t)\right)' = f'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + f(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$