חדו"א 2 שבוע 3

וקטור *גיאומטרי במישור* $\mathbf{R}^2$ *או במרחב* $\mathbf{R}^3$ *הוא קטע מכוון אותו ניתן להציג בצורה אלגברית על ידי זוג או שלשה של ערכים ממשיים*

דוגמאות

$$\bar{a} = (2,5) = 2\hat{i} + 5\hat{j} \in \mathbf{R}^2$$

כאשר $\hat{i} = (1,0),\ \hat{j} = (0,1)$ *הם וקטורי היחידה היוצרים בסיס אורתונורמאלי למישור* $\mathbf{R}^2$

$$\bar{b} = (9,-3,-5) = 9\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k} \in \mathbf{R}^3$$

$$\bar{0} = (0,0,0) = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \in \mathbf{R}^3$$

כאשר $\hat{i} = (1,0,0),\ \hat{j} = (0,1,0),\ \hat{k} = (0,0,1)$ *הם וקטורי היחידה היוצרים בסיס אורתונורמאלי למרחב* $\mathbf{R}^3$

הגדרת וקטור עפ"י נקודות מוצאו וסופו $A(a_x, a_y, a_z),\ B(b_x, b_y, b_z)$

$$\overline{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z)$$

דוגמאות

נתונות נקודות $A(3,-1,8),\ B(4,2,-3)$ *אזי וקטורים*

$$\overline{AB} = (4-3, 2+1, -3-8) = (1,3,-11) \qquad \overline{BA} = (3-4, -1-2, 8+3) = (-1,-3,11)$$

*1. **הכפלה בסקלר, חיבור**, צירוף ליניארי ותלות ליניארי (כמו באלגברה ליניארית)*

שני וקטורים במישור $\mathbf{R}^2$ *או במרחב* $\mathbf{R}^3$ *תלויים ליניארית נקראים* ***קוליניאריים*** *(מקבילים או מתלכדים עם אתו ישר)*
שלושה וקטורים במרחב $\mathbf{R}^3$ *תלויים ליניארית נקראים* ***קופלנריים*** *(מקבילים או מתלכדים עם אתו מישור)*

2. מכפלה סקלרית

$$\bar{a} \cdot \bar{b}$$

של שני וקטורים במישור $\mathbf{R}^2$ *או במרחב* $\mathbf{R}^3$ *היא הסקלר השווה לאורך וקטור ראשון כפול אורך וקטור שני כפול קוסינוס הזוית בין הווקטורים*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a}, \bar{b})$$

משפט

$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y$ *כאשר* $\bar{a} = (a_x, a_y), \bar{b} = (b_x, b_y)$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ *כאשר* $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z), \bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$

מסקנות

1) זווית בין 2 וקטורים

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

2) היטלו של וקטור $\bar{a}$ *על וקטור* $\bar{b}$ *:*

$$proj_{\bar{b}} \bar{a} = |\bar{a}| \cos(\bar{a}, \bar{b}) \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \bar{b}$$

תרגיל - חשב את $\bar{a}\cdot\bar{b}$, מצא את הזווית α בין שני הווקטורים ואת $proj_{\bar{b}}\bar{a}$ כאשר

א) $\bar{a}=(1,2,2),\bar{b}=(3,0,-4)$ ב) $\bar{a}=(4,-2,3),\bar{b}=(3,0,-4)$

תשובה א) $\bar{a}\cdot\bar{b}=-5,\alpha=\pi-\arccos\left(\frac{1}{3}\right), proj_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{1}{5}(-3,0,4)$ ב) $\bar{a}\cdot\bar{b}=0,\alpha=\frac{\pi}{2}, proj_{\bar{b}}\bar{a}=(0,0,0)$

משפט - הזווית α בין שני וקטורים

- חדה אם ורק אם מכפלתם הסקלרית חיובית
- קהה אם ורק אם מכפלתם הסקלרית שלילית
- ישרה אם ורק אם מכפלתם הסקלרית שווה לאפס

3. מכפלה וקטורית

$$\bar{a}\times\bar{b}$$

של שני וקטורים במרחב $\mathbf{R}^3$ מהווה וקטור המאונך לשניהם
בעל אורך השווה לשטח המקבילית ה"בנויה" על 2 הווקטורים

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\bar{a},\bar{b}\right)$$

וכוונו מוגדר על ידי "כלל הבורג" או כלל "יד ימין"("למה מה")

משפט

$$\bar{a}\times\bar{b}=\det\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}=\left(a_yb_z-a_zb_y, a_zb_x-a_xb_z, a_xb_y-a_yb_x\right)$$

כאשר $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z),\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$

תכונות של מכפלה וקטורית

1) לכל 2 וקטורים $\bar{b}\times\bar{a}=-\bar{a}\times\bar{b}$
2) לכל 2 וקטורים קוליניאריים $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$ (בפרט $\bar{a}\times\bar{a}=\bar{0}$)
3) לכל 2 וקטורים וסקלר $t\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\left(t\bar{a}\times\bar{b}\right)=\left(\bar{a}\times t\bar{b}\right)$
4) לכל 3 וקטורים $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$
5) שטח מקבילית שצלעותיה הצמודות הן 2 וקטורים $=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$
6) שטח ממשולש ששני צלעותיו הן וקטורים $=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$

4. מכפלה מעורבת

של שלושה וקטורים במרחב $\mathbf{R}^3$ היא סקלר $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$

משפט

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\det\begin{pmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{pmatrix}$$

כאשר $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z),\bar{b}=(b_x,b_y,b_z),\bar{c}=(c_x,c_y,c_z)$

תכונות של מכפלה מעורבת

לכל 3 וקטורים

1) $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}=(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a}=-(\bar{b}\times\bar{a})\cdot\bar{c}=-(\bar{a}\times\bar{c})\cdot\bar{b}=-(\bar{c}\times\bar{b})\cdot\bar{a}$

2) שטח מקבילון שצלעותיו הצמודות הן 3 וקטורים $= \left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\right|$

3) שטח פירמידה שצלעותיה הצמודות הן 3 וקטורים $= \frac{1}{6}\left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\right|$

4) 3 וקטורים קופלנריים אם ורק אם $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=0$ בפרט $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{a}=0$

5. מישור במרחב

אוסף הנקודות (x,y,z) המוגדר על ידי משוואה ליניארית לא טריוויאלית ולא מנוונת

$ax+by+cz=d$ כאשר $a^2+b^2+c^2\neq 0$

משפט

וקטור $\bar{n}=(a,b,c)$ מאונך לכל וקטור החל במישור $ax+by+cz=d$

הוכחה - כל וקטור $\bar{u}$ שחל במישור $ax+by+cz=d$ מחבר בין 2 נקודות במישור (x_1,y_1,z_1) ו- (x_2,y_2,z_2) ולכן $\bar{u}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_1-z_2)$. הנקודות חייבות לקיים $ax_1+by_1+cz_1=d$ ו- $ax_2+by_2+cz_2=d$ ולכן אם נחסר בין המשוואות נקבל

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_1-z_2)=0$$

כלומר $\bar{n}\cdot\bar{u}=0$ לכן שני הווקטורים מאונכים זה לזה

מסקנה

משוואת המישור המאונך לווקטור $\bar{n}=(a,b,c)$ (אנך) ועובר דרך נקודה $P(x_0,y_0,z_0)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

תרגיל

מצא את משוואת המישור עפ"י אנך $\bar{n}=(4,-5,2)$ ונקודה $P(2,0,-6)$ שחלה במישור

תשובה $4(x-2)-5(y-0)+2(z+6)=0$ או $4x-5y+2z=-4$

6. בעיות נפוצות הקשורות למישור

1. מציאת משוואת מישור עפ"י 3 נקודות שאינן נמצאות על ישר משותף $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2), C(x_3,y_3,z_3)$

נסמן נקודה כללית במישור על יד $\bar{r}=(x,y,z)$ אזי ניתן להגדיר אנך למישור על ידי $\bar{n}=AB\times AC$ (שני הווקטורים אינן קוליניאריים)

ואת משוואת המישור על ידי מכפלה מעורבת

$$\bar{n}\cdot A\bar{r}=(AB\times AC)\cdot(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \end{pmatrix}=0$$

תרגיל

מצא את משוואת המישור המכיל את 3 נקודה $A(1,0,-1), B(1,1,-1), C(2,1,3)$

2. זווית בין שני מישורים (הקטנה משתים)

זווית α בין שני מישורים שווה לזווית בין שני האנכים $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ למישורים או משלימה את הזווית ל- π. כלומר $\cos\alpha = \pm\frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$ ומכוון שזווית α לא יכולה להיות קהה נקבל

$$\cos\alpha = \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$$

הערות $\cos\alpha = 0$ אם ורק אם הישרים מאונכים

$\cos\alpha = 1$ אם ורק אם הישרים מקבילים

תרגיל

מצא זווית α בין שני מישורים ובדוק האם המישורים מקבילים או מאונכים

א) $x+y+z=7$ ו- $5x-3y-2z=-1$

ב) $x+y+z=7$ ו- $3x+3y+3z=0$

ג) $x+y+z=7$ ו- $x+2y+3z=4$

תשובה א) מאונכים ב) מקבילים ג) $\arccos\left(\frac{\sqrt{42}}{7}\right)$

7. ישר במרחב

העובר דרך נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ ומקביל לווקטור $\bar{v} = (a,b,c)$ (או מכיל אותו)

נהוג להציג באמצעות **הצגה פרמטרית** (פרישה ליניארית מוזזת)

$$\bar{r} = \overline{OP} + t\bar{v}$$

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a,b,c)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

או הצגה קנונית של (במקרים כאשר $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$)

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

תרגיל

מצאו את הצגתו הפרמטרית ואת הצגתו הקנונית של הישר

א) העובר דרך נקודה $P(3,-2,5)$ ומקביל לווקטור $\bar{v} = (1,-1,3)$

$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = -2-t \\ z = 5+3t \end{cases} \qquad \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-5}{3}$$

ב) העובר דרך נקודה $P(0,-1,3)$ ומקביל לווקטור $\bar{v} = (2,0,-3)$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 3-3t \end{cases} \qquad \frac{x}{2} = \frac{z-3}{-3}, y = -1$$

8. בעיות נפוצות הקשורות למישור וישר

3. מציאת מרחק בין נקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ למישור $ax+by+cz=d$

נגדיר ישר העובר דרך $P(x_0,y_0,z_0)$ ומאונך למישור $ax+by+cz=d$ בצורה פרמטרית

$$\bar{r}=\overline{OP}+t\bar{v}$$
$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c)$$

נמצא את נקודת החיתוך בין הישר למישור

$$ax+by+cz=d$$
$$a(x_0+ta)+b(y_0+tb)+c(z_0+tc)=d$$
$$t(a^2+b^2+c^2)=d-ax_0-by_0-cz_0$$
$$t=\frac{d-ax_0-by_0-cz_0}{a^2+b^2+c^2}$$

המרחק המבוקש שווה ל-

$$\left|\bar{r}-\overline{OP}\right|=|t\bar{v}|=|t|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{|d-ax_0-by_0-cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ניתן לרשום גם

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

תרגיל

מצא מרחק בין נקודה $P(4,2,-1)$ למישור $2x+y-2z=-5$

4. מציאת הצגתו הפרמטרית של ישר החיתוך של שני מישורים לא מקבילים

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

$P(x_0,y_0,z_0)$ - פתרון פרטי שרירותי המשותף לשתי המשוואות

$$\bar{v}=(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)$$

תרגיל

מצאת את הצגתו הפרמטרית של ישר החיתוך של שני מישורים

$2x+y-2z=-5$ ו- $x+y-3z=2$

5. מציאת מרחק בין נקודה $P_1(x_1,y_1,z_1)$ לישר

העובר דרך $P(x_0,y_0,z_0)$ וכוונו $\bar{v}=(a,b,c)$

$\dfrac{|PP_1\times\bar{v}|}{|\bar{v}|}$ (שטח מקבילית חלקי בסיס = גובה)

תרגיל - מצא מרחק בין נקודה $P(0,-2,-1)$ לישר $\begin{cases} x=1+3t \\ y=4-t \\ z=2t \end{cases}$

6. מצבים הדדיים בין שני ישרים

$$(x,y,z)=(x_{01},y_{01},z_{01})+t(a_1,b_1,c_1)$$

ו- $(x,y,z)=(x_{02},y_{02},z_{02})+s(a_2,b_2,c_2)$

פותרים מערכת של 3 משוואות בשני משתנים

$$(x_{01},y_{01},z_{01})+t(a_1,b_1,c_1)=(x_{02},y_{02},z_{02})+s(a_2,b_2,c_2)$$

1) למערכת יש פתרון יחיד – הישרים נחתכים
2) למערכת יש אינסוף פתרונות – הישרים מתלכדים
3) (רוב הסיכויים) למערכת אין פתרון
3א) $(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)=(0,0,0)$ הישרים מקבילים
3ב) (רוב הסיכויים) $(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)\neq(0,0,0)$ הישרים מצטלבים – במקרה הזה לא קיים מישור המכיל את 2 הישרים אבל קיימים 2 מישורים מקבילים יחידיים כך שכל אחד מכיל כל אחד מהישרים

תרגיל

בדוק האם הישרים הבאים מתלכדים, מקבילים, נחתכים או מצטלבים

א) $\begin{cases}x=-4+3t\\ y=1-t\\ z=t\end{cases}$ ו- $\begin{cases}x=1+2s\\ y=4-3s\\ z=-1+2s\end{cases}$ ב) $\begin{cases}x=-4+3t\\ y=1-t\\ z=t\end{cases}$ ו- $\begin{cases}x=1-6s\\ y=4+2s\\ z=-1-2s\end{cases}$

ג) $\begin{cases}x=-4+3t\\ y=1-t\\ z=2+t\end{cases}$ ו- $\begin{cases}x=1+2s\\ y=4-3s\\ z=-1+2s\end{cases}$ ד) $\begin{cases}x=-4+3t\\ y=1-t\\ z=t\end{cases}$ ו- $\begin{cases}x=8-6s\\ y=-2+2s\\ z=-2s\end{cases}$

תשובה א) נחתכים ב) מקבילים ג) מצטלבים ד) מתלכדים

7. זווית בין שני ישרים (הקטנה משתים)

זווית α בין שני ישרים שווה לזווית בין שני ווקטורי כיווניהם $\bar{v}_1,\bar{v}_2$ או משלימה את הזווית ל- π. כלומר $\cos\alpha=\pm\frac{\bar{v}_1\cdot\bar{v}_2}{|\bar{v}_1|\cdot|\bar{v}_2|}$ ומכוון שזווית α לא יכולה להיות קהה נקבל

$$\cos\alpha=\frac{|\bar{v}_1\cdot\bar{v}_2|}{|\bar{v}_1|\cdot|\bar{v}_2|}$$

הערות $\cos\alpha=0$ אם ורק אם הישרים מאונכים
$\cos\alpha=1$ אם ורק אם הישרים מקבילים

8. זווית בין ישר למישור (הקטנה ביותר)

זווית α בין ישר לישר המאונך למישור ניתן לחשב על ידי $\cos\alpha=\frac{|\bar{v}\cdot\bar{n}|}{|\bar{v}|\cdot|\bar{n}|}$

והזווית המבוקשת תהיה $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$

הערות $\cos\beta=0$ אם ורק אם הישר מקביל למישור
$\cos\beta=1$ אם ורק אם הישר מאונך למישור