חדו"א 2 שבוע 2

הגדרה

סכום סדרת פונקציות $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ נקרא טור פונקציות

הצבת ערך פרטי $x=x_0$ בטור הופכת את הטור לטור מספרי $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$

במידה וטור זה מתכנס אומרים כי טור פונקציות מתכנס בנקודה $x=x_0$

תרגיל

בדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ בנקודות א) $x=1$ ב) $x=-1$ ג) $x=0.5$

תשובה א) מתבדר ב) מתכנס בתנאי ג) מתכנס

הגדרה

אוסף הערכים של x בהם טור $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס נקרא תחום ההתכנסות של הטור

תרגיל 1

מצא את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

פתרון 1

נשתמש במבחן דלמבר על מנת לבדוק את התכנסות בהחלט

$$q=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{k+1}\cdot\frac{k}{x^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|x\cdot\frac{k}{k+1}\right|=|x|$$

הטור מתכנס בהחלט כאשר $q=|x|<1$ ולכן $-1<x<1$

אם $q>1$ הטור מתבדר(לפי תנאי הכרחי) - נבדוק מקרים כאשר $q=|x|=1$

כאשר $x=1$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n}$ - טור הרמוני מתבדר

כאשר $x=-1$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ - טור לייבניץ המתכנס בתנאי

תשובה – תחום ההתכנסות $-1\le x<1$

פתרון 2
נשתמש במבחן קושי על מנת לבדוק את התכנסות בהחלט

$$q=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|f_k(x)\right|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k}\right|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x|}{\sqrt[k]{k}}=|x|$$

המשך כמו בפתרון 1

הגדרה

טור פונקציות מהצורה $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ נקרא טור חזקות

משפט עם הגדרה

לכל טור חזקות $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ קיים ערך אי שלילי (כולל אינסוף) $0\le R\le+\infty$
הנקרא רדיוס ההתכנסות כך שהטור

א. מתכנס בהחלט כאשר $|x-x_0|<R$ כלומר $x_0-R<x<x_0+R$

ב. מתבדר כאשר $|x-x_0|>R$ כלומר $x>x_0+R$ או $x<x_0-R$

ג. יכול להתכנס בהחלט או בתנאי או להתבדר כאשר $x=x_0\pm R$
(בכל אחת מהנקודות מצב ההתכנסות יכול להיות שונה)

משפט Cauchy- Hadamard

רדיוס ההתכנסות של טור חזקות $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$ שווה ל- $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$

במידה והגבול קיים

תרגיל 2
מצא את תחום ההתכנסות ואת רדיוס ההתכנסות (במידה ויש) של הטורים הבאים

א1) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^k$ א2) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{5}\right)^k$ ב1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ ב2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+7)^k}{k!}$

ג1) $\sum_{k=1}^{\infty}k!x^k$ ג2) $\sum_{k=1}^{\infty}k!(x-10)^k$ ד) $\sum_{k=1}^{\infty}(\ln x)^k$

תשובה א1) $-5<x<5,\ R=5$ א2) $-2<x<8,\ R=5$

ב1,2) $-\infty<x<+\infty,\ R=\infty$

ג1) $x=0,\ R=0$ ג2) $x=10,\ R=0$

ד) $\frac{1}{e}<x<e$, רדיוס ההתכנסות לא רלוונטי

משפט (גזירה ואינטגרל של טור חזקות)

א) לשלושת טורי החזקות

1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$

2) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$

3) $\int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

יש אותו רדיוס ההתכנסות R

ב) תחום ההתכנסות של טור 1 מכיל או שווה לתחום ההתכנסות של טור 2 ומוכל או שווה לתחום ההתכנסות של טור 3

(במלים אחרות גזירת טור יכולה להוריד אחת או שתי נקודות הקצה $x = \pm R$ מתחום התכנסותו בעוד שאינטגרציה - להוסיפן)

תרגיל 3

מצא את תחום ההתכנסות ואת רדיוס ההתכנסות של הטורים הבאים

א) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ ב) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\right)'$ ג) $\int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}\right) dt$

תשובה

א) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ תחום ההתכנסות $-1 \le x < 1$

ב) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ תחום ההתכנסות $-1 < x < 1$

ג) $\int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}\right) dt = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k(k-1)}$ תחום ההתכנסות $-1 \le x \le 1$

הגדרה

יהי $f\left(x\right)$ פונקציה , $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ טור חזקות ומספר חיובי $R>0$

כך שלכל $-R<x<R$ מתקיים $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f\left(x\right)$

אזי פונקציה $f\left(x\right)$ נקראת פונקציה אנליטית וטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ נקרא טור מקלורן של $f\left(x\right)$ בתחום $-R<x<R$

משפט בהמשך להגדרה

$$a_k = \frac{f^{(k)}\left(0\right)}{k!}$$

רמז להוכחה

להציב $x=0$ בשוויון $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f\left(x\right)$ ונגזרותיו מסדר 1, 2, 3 ...

הגדרה

יהי $f\left(x\right)$ פונקציה, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x-x_0\right)^k$ טור חזקות ומספר חיובי $R>0$

כך שלכל $x_0-R<x<x_0+R$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x-x_0\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \left(x-x_0\right)^k = f\left(x\right)$$

אזי פונקציה $f\left(x\right)$ נקראת פונקציה אנליטית וטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x-x_0\right)^k$ נקרא טור טיילור

של $f\left(x\right)$ בתחום $x_0-R<x<x_0+R$

משפט בהמשך להגדרה

$$a_k = \frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}$$

תרגיל

מצא את טור מקלורן ואת תחום התכנסותו לפונקציות הבאות

1) $f(x)=e^x$

2) $f(x)=\sin x$ רמז $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

3) $f(x)=\cos x$ רמז $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ או $\cos x=\sin' x$

5) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 6) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

7) $f(x)=\ln(1+x)$ רמז $\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\ln(1+x)$

8) $f(x)=\arctan x$ רמז $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\arctan x$

9) $f(x)=(1+x)^\alpha$

תשובה

1) $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ $\qquad -\infty<x<+\infty$

2) $\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\qquad -\infty<x<+\infty$

3) $\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ $\qquad -\infty<x<+\infty$

4) $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ $\qquad -1<x<1$

5) $\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ $\qquad -1<x<1$

6) $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$ $\qquad -1<x\le 1$

7) $\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ $\qquad -1\le x\le 1$

8) $(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$

$(-1<m<0)\,-1<x\le 1 \quad (m\le -1)\,-1<x<1 \quad (0\le m\ne 1,2,\ldots)\,-1\le x\le 1$

דוגמא לפונקציה לא אנליטית

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x^2}, x\neq 0 \\ 0, x\neq 0 \end{cases}$$

ניתן להראות כי לכל k מתקיים $f^{(k)}(0)=0$ לכן טור מקלורן של f הוא $\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k\equiv 0$

תזכורת מחדו"א 1

שארית פולינום מקלורן בצורת לגרנז'

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

כאשר C היא נקודה לא ידועה בין 0 ל- x

שארית פולינום טיילור בצורת לגרנז'

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

כאשר C היא נקודה לא ידועה בין x_0 ל- x

משפט בהמשך לתזכורת

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k=f(x)$$

אם ורק אם

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$