חדו"א 2 שבוע 1

סדרת מספרים

פונקציה $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$

אותה נהוג להציג בצורה $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ או $\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots\}$

לדוגמא במקום $f(k)=\frac{1}{k^2}, k\in\mathbf{N}$ נרשום $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ או $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots\right\}$

סכום חלקי של הסדרה $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

טור מספרי $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$

אם גבול קיים – טור **מתכנס** , לא קיים או אינסופי – **מתבדר**

דוגמאות

טור מתכנס $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$

טורים מתבדרים $\sum_{k=1}^{\infty}k=\infty$ (גבול אינסופי) ו- $\sum_{k=1}^{\infty}\cos(\pi k)$ (גבול לא קיים)

חשוב - כל סכום חלקי של כל הסדרה $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ מהווה מספר סופי !!!

כלומר מושג ההתכנסות מתייחס לטורים אינסופיים בלבד !!!

($\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{k=k_0}^{\infty}a_k$ מתכנס כאשר $k_0\in\mathbf{N}$ לדוגמה $\sum_{k=1000}^{\infty}a_k$)

2 מקרים בהם ניתן לחשב את סכום הטור ה"מדויק"

1) סדרה הנדסית $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\ldots=\frac{a_{n+1}}{a_n}-=q$$

איבר כללי של סדרה הנדסית $a_n=a_{n-1}\cdot q=a_1\cdot q^{n-1}$

סכום של n איברים ראשונים של סדרה הנדסית $\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{a_1\cdot(q^n-1)}{q-1}$

סדרה הנדסית אינסופית יורדת $|q|<1$

טור הנדסי $\sum_{k=1}^{\infty} a_1\cdot q^{k-1}$ מתבדר כאשר $|q|\geq 1$ מתכנס כאשר $|q|<1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{a_1}{1-q}$$

תרגיל 1 חשב את

א) $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots\right\}$ תשובה $\frac{1}{1-0.5}=2$

ב) $\left\{3,\frac{3\cdot 2}{5},\frac{3\cdot 2^2}{5^2},\ldots\right\}$ תשובה $\frac{3}{1-0.4}=5$

ג) $\left\{3,\frac{3\cdot 5}{2},\frac{3\cdot 5^2}{2^2},\ldots\right\}$ תשובה - הטור מתבדר

2) טור טלסקופי $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_{k+1})$ כאשר $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה כלשהיא

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-a_{k+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}$$

מתכנס אם ורק אם הסדרה מתכנסת

תרגיל 2 חשב את

א) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ תשובה $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1$ מתכנס

ב) $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ תשובה $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\ln(k+1)-\ln(k)$ מתבדר

במקרה הכללי לא נוכל לחשב את סכום הטור והשאלה היחידה תהיה האם הוא מתכנס או מתבדר

משפט 1

(תנאי הכרחי להתכנסות או תנאי מספיק להתבדרות)

אם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *מתכנס אז* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(אם $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *אז* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *מתבדר)*

רמז להוכחה $\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$

חשוב - אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *הטור יכול להתכנס או להתבדר !!!*

משפט 2

(פעולות עם טורים)

א) אם טורים $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ו-* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *מתכנסים אז הטורים הבאים מתכנסים אף הם*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k)\ ,\ \sum_{k=1}^{\infty} c\cdot a_k \text{ (לכל מקדם } c\text{)}\ ,\ \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \ \ (m\in\mathbf{N})$$

ב) אם טורים $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ו-* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *מתבדרים אז הטורים הבאים מתבדרים אף הם*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c\cdot a_k \text{ (לכל מקדם } c\neq 0\text{)}\ ,\ \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \ \ (m\in\mathbf{N})$$

בעוד שטור $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k)$ *יכול להתכנס או להתבדר*

ג) אם טור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *מתכנס וטור* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *מתבדר אז טור* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k)$ *מתבדר*

הגדרה

טור מספרי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *נקרא טור חיובי אם קיים* $n_0\in\mathbf{N}$ *כך שלכל* $n>n_0$ *מתקיים* $a_n \geq 0$

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

משפט 1 (מבחן אינטגראלי)

יהיו $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ טור חיובי ותהי $f(x)$ פונקציה מונוטונית יורדת

כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $f(n) = a_n$

אזי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אם ורק אם $\int_1^{\infty} f(x)dx$ מתכנס

משפט 2

טור הרמוני $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ מתכנס אם ורק אם $\alpha > 1$

רמז להוכחה – מבחן אינטגראלי

תרגיל 3

בדקו את התכנסות הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k + 1}}$

תרגיל 4

א) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2(\pi k)$

ב) בדקו את התכנסות האינטגרל $\int_1^{\infty} \sin^2(\pi x)dx$

ג) האם מצאנו דוגמא נגדית למבחן האינטגראלי ?

משפט 3 (מבחן ההשוואה הראשון)

יהיו $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ טורים חיוביים וקיים $n_0 \in \mathbf{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$b_n \geq a_n$$

אזי

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר $\Leftarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתבדר

תרגיל 5

בדוק את התכנסות הטורים הבאים

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{4k^3+1}$ 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{3k}{4k^3+1}\right)$ 3) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{3k}{4k^3+1}\right)$ 4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2}{4k^3+1}$

תשובה 2,1) מתכנס 4,3) מתבדר

משפט 4 (מבחן ההשוואה השני - הגבולי)

יהיו $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ טורים חיוביים ויהא $L=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}$

אזי

אם $0<L<\infty$ (גבול סופי שונה מאפס) אז $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס

אם $L=0$ ו- $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס אז גם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס

אם $L=\infty$ ו- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר אז גם $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתבדר

תרגיל 6

בדוק את התכנסות הטורים הבאים

1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k^3+3k^2+2k+1}{5k^4+4k^3+3k^2+2k+1}$ 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k^2+2k+1}{5k^4+4k^3+3k^2+2k+1}$ 3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{3k^2\sqrt{5k+3}}$

תשובה 1) מתבדר 2, 3) מתכנס

משפט 5(מבחן דלמבר או מבחן המנה)

עבור טור חיובי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ נסמן $q=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}$

הטור מתכנס כאשר $q<1$ ומתבדר כאשר $q>1$ (אי וודאות כאשר $q=1$)

תרגיל 7

בדוק את התכנסות הטורים הבאים

א) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{1000}}{k!}$, ב) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1000^k}{k!}$, ג) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^{1000}}$

תשובה א,ב) מתכנס ג) מתבדר

משפט 6(מבחן קושי או מבחן השורש)

עבור טור חיובי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ נסמן $q=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}$

הטור מתכנס כאשר $q<1$ ומתבדר כאשר $q>1$ (אי וודאות כאשר $q=1$)

(תזכורת מחדו"א 1 $q=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}$)

תרגיל 8

בדוק את התכנסות הטורים הבאים

1) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}$ 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k}$ 3) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k^2}$

תשובה 2,1) מתבדר 3) מתכנס

טור כללי (מכיל אינסוף איברים חיוביים ואינסוף איברים שליליים)

הגדרות

1) טור מספרי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ נקרא טור כללי (דוגמאות $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$, $\sum_{k=1}^{\infty}\sin(k)$)

אם לכל $n_0 \in \mathbf{N}$ קיימים $n_1 > n_0$ ו- $n_2 > n_0$ כך ש- $a_{n_1} > 0$ ו- $a_{n_2} < 0$

2) טור כללי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס בהחלט במידה וטור $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתכנס

3) טור כללי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס בתנאי אם טור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אבל טור $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתבדר

משפט

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס בהחלט $\Leftarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס בתנאי

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר בתנאי $\Leftarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדרבהחלט

תרגיל 9

בדוק את התכנסות הטורים הבאים בתנאי ובהחלט

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$ 2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k-1}{k}\right)^k$ 3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

תשובה 1) מתכנס בהחלט 2) מתבדר 3) מתכנס רק בתנאי

משפט 7 (לייבניץ)

טור מתחלף $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ או $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ כאשר $a_k > 0$

מתכנס במידה ו- $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית יורדת ושואפת לאפס

משפט 8

טור הרמוני $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\alpha}}$ מתכנס בהחלט כאשר $\alpha > 1$

מתכנס בתנאי כאשר $0 < \alpha \le 1$

ומתבדר כאשר $\alpha \le 0$

תרגיל 10

הראה כי הטורים הבאים מתכנסים בתנאי תוך שימוש במבחן לייבניץ

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$, 2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{k}\right)}$, 3) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{1}{k}\right)$

משפט 9 (מבחן דיריכלה)

טור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$ מתכנס כאשר

- $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית ושואפת לאפס
- כל הסכומים $\sum_{k=1}^{n} b_k$ חסומים - קיים מספר M

כך שלכל n מתקיים $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| < M$

תרגיל 11

הראה כי הטורים הבאים מתכנסים בתנאי תוך שימוש במבחן דיריכלה

1) $\frac{1}{1}+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\frac{1}{7}+\frac{2}{9}-\frac{3}{11}\pm\ldots$ פתרון $a_k = \frac{1}{2k-1}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty} = \{1,2,-3,1,2,-3,\ldots\}$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k}$ פתרון $a_k = \frac{1}{k}, b_k = \cos k$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos k\right| = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\left|\sum_{k=1}^{n} \cos k \sin\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\left|\sum_{k=1}^{n} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right) - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$\frac{1}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{2}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)} = M$$

משפט 10 (מבחן אבל)

טור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$ מתכנס כאשר

- $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית וחסומה
- טור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס

תרגיל 12

הראה כי טור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$ מתכנס בתנאי תוך שימוש במבחני לייבניץ ואבל

פתרון $a_k = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k, \ b_k = \frac{(-1)^k}{k}$