

תרגול 4

משוואות דיפרנציאליות מסדר שני

משוואות ניתנות להורדת סדר

$$y^{(k-1)} = \int f(x) dx + C_1 \Leftrightarrow y^{(k)} = f(x) \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{I.}$$

דוגמה פתור : $y'' = \cos^2 x$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$, פתרון

$$y'' = \cos^2 x \Rightarrow y' = \int \cos^2 x dx + C_1$$

$$\{y' = 0.5x + 0.25 \sin 2x + C_1, \quad y'(0) = 1\} \Rightarrow 1 = 0.5 \cdot 0 + 0.25 \sin 0 + C_1 \Rightarrow$$

$$C_1 = 1 \Rightarrow y' = 0.5x + 0.25 \sin 2x + 1$$

$$\{y = 0.25x^2 - 0.125 \cos 2x + x + C_2, \quad y(0) = 0\} \Rightarrow C_2 = 0.125 \Rightarrow$$

$$\underline{y = 0.25x^2 + x - 0.125 \cos 2x + 0.125}$$

$$\{F(x, p, p') = 0, \quad y' = p(x)\} \Leftrightarrow \underline{F(x, y', y'') = 0} \quad \text{II}$$

$$\{F(x, p, p') = 0, \quad y^{(n-1)} = p(x)\} \Leftrightarrow \underline{F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0} \quad (a) \text{ II}$$

דוגמה פתור : $x y'' = y' + x$

פתרון המשוואה אינו כוללת את המשתנה התלוי y . ניתן להוריד סדר של המשוואה ע"י הצבה $y' = p(x)$

$$\{y' = p(x), \quad x y'' = y' + x\} \Rightarrow x p' = p + x \Rightarrow \{p' = p/x + 1, \quad x \neq 0\}$$

$$p' = p/x + 1, \quad p/x = t(x) \Rightarrow x t' = 1 \Rightarrow t = \ln |x| + C \Rightarrow p = x \ln |x| + Cx \Rightarrow$$

$$y' = x \ln |x| + Cx \Rightarrow \underline{y = x^2 (0.5 \ln |x| + C_1) + C_2}$$

$$F(y, p, p dp/dy) = 0 \Leftrightarrow y' = p(y), \quad \underline{F(y, y', y'') = 0} \quad \text{III}$$

דוגמה פתור : $y y'' + (y')^2 + 1 = 0$

פתרון המשוואה אינו כוללת את המשתנה הבלתי תלוי x . ניתן להוריד סדר של המשוואה

$$\text{ע"י הצבה } y' = p(y) \Leftrightarrow \frac{dp}{dy} p = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = y''$$

$$\left. \begin{array}{l} y y'' + (y')^2 + 1 = 0 \\ y' = p(y), \quad y'' = p'_y p \end{array} \right\} \Rightarrow y \frac{dp}{dy} p + p^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{p}{p^2 + 1} dp + \frac{dy}{y} = 0, \quad y \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5 \ln |p^2 + 1| + \ln |y| = \ln |C_1| \Rightarrow \sqrt{p^2 + 1} \cdot y = C_1 \Rightarrow p = \pm \sqrt{C_1^2 - y^2} / y$$

$$\pm \frac{y}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} dy = dx \Rightarrow \mp \sqrt{C_1^2 - y^2} = x + C_2 \Rightarrow \underline{(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2}$$

האם $y = \text{const}$ פתרון ? לא, (בדוק!)

IV משוואה $F(x', y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ הומוגנית כלפי $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ שהמשוואה

אינה תשתנה עקב החלפה $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ ב $ky, ky', ky'', \dots, ky^{(n)}$

$$\left(F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = t^m F(x, ky, ky', ky'', \dots, ky^{(n)}) \right)$$

ניתן להוריד סדר של המשוואה ע"י הצבה $y' / y = z(x)$.

דוגמה פתור : $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$

פתרון

$$xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0 \Rightarrow x \frac{y''}{y} + x \left(\frac{y'}{y} \right)^2 - \frac{y'}{y} = 0$$

$$\frac{y'}{y} = z(x) \Rightarrow y' = yz \Rightarrow y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' \Rightarrow \frac{y''}{y} = z^2 + z'$$

$$x \frac{y''}{y} + x \left(\frac{y'}{y} \right)^2 - \frac{y'}{y} = 0 \Rightarrow x(z^2 + z') + xz^2 - z = 0 \Rightarrow xz' + 2xz^2 - z = 0$$

ומקבלים משוואת ברנולי

$$xz' + 2xz^2 - z = 0 \Rightarrow z = x / (x^2 + C_1) \Rightarrow dy / y = \left(x / (x^2 + C_1) \right) dx \Rightarrow y = C_2 \sqrt{x^2 + C_1}$$

תרגילים

- | | |
|--|--|
| 1) $y'' = \sin x \cos x, y(0) = -1, y'(0) = 0$ | 9) $x^2 yy'' = (y - xy')^2$ |
| 2) $y'' \tan x = y' + 1$ | 10) $y'' + (y')^2 = y, y(0) = 1, y'(0) = 1/\sqrt{2}$ |
| 3) $y'' - 2yy' = 0, y(1) = 0, y'(1) = 4$ | 11) $2yy'' = (y')^2 + 1$ |
| 4) $y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0$ | 12) $ts'' + s' + t = 0$ |
| 5) $y''(e^x + 1) + y' = 0$ | 13) $yy'' - (y')^2 = y^2 y', y(0) = 1, y'(0) = 2$ |
| 6) $xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$ | 14) $y'' - 2y' \cot x = \sin^3 x$ |
| 7) $yy'' = (y')^2 - (y')^3$ | 15) $(x^2 + 1)((y')^2 - yy'') = xyy'$ |
| 8) $y'' + y' \tan x = \sin 2x$ | 16) $y''' = (y'')^2$ 17) $yy'' - (y')^2 = yy'$ |

תשובות :

- | | |
|---|--|
| 1) $y = 0.25x - 0.125 \sin 2x - 1$ | 8) $y = C_1 \sin x - x - 0.5 \sin 2x + C_2$ |
| 2) $y = C_2 - C_1 \cos x - x$ | 9) $y = C_2 x e^{-C_1/x}$ |
| 3) $y = 2 \tan(2x - 2)$ | 10) $y = 0.25(x + \sqrt{2})^2 + 0.5$ |
| 4) $y = C_2 e^{C_1 x} - 1.5$ | 11) $C_1^2 (x + C_2)^2 = 4(C_1 y - 1)$ |
| 5) $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$ | 12) $s = C_1 \ln t - 0.25t^2 + C_2$ |
| 6) $y^2 = C_1 x^4 + C_2$ | 13) $x = \ln 2y / (y + 1) $ |
| 7) $C_2 + y + C_1 \ln y = x, y = C$ | 14) $y = C_1 (0.5x - 0.25 \sin 2x) - (\sin^3 x) / 3 + C_2$ |
| 15) $y = C_2 \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{C_1}$ | 16) $(y'' = z(x)), y = -(x + C_1) \ln x + C_1 + C_2 x + C_3$ |
| 17) $\{ \ln \ln y + C_1 = x + C_2, y = C \} \Leftrightarrow \{ y = a \cdot b^{e^x}, y = C \}$ | |

תרגול 5

משוואות דיפרנציאליות מסדר שני (המשך)

משוואות לינאריות $y''+p(x)y'+g(x)y=f(x)$

I. משוואות לינאריות הומוגניות $y''+p(x)y'+g(x)y=0$

אם y_1, y_2, y_3 פתרונות, אזי $y_2 \pm y_1, Cy$ גם פתרונות. ($C \in \mathbf{R}$)

אם y_1, y_2 פתרונות בלתי תלויים לינארית $\left(\frac{y_1}{y_2} \neq C\right)$, אזי $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ פתרון כללי.

$(C, C_1, C_2 \in \mathbf{R})$

מנוסחת אוסטרודסקי - לאיוביל $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C e^{-\int p(x)dx}$ מקבלים $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}$

דוגמה 1 פתור $x y'' + 2y' + x y = 0$ כאשר נתון פתרון אחד $y_1 = \frac{\sin x}{x}$

פתרון

$$x y'' + 2y' + x y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0 \Rightarrow \int p(x)dx = \int \frac{2}{x} dx = \ln(x^2) \Rightarrow e^{-\int p(x)dx} = \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} \Rightarrow \left(\frac{x}{\sin x} y_2\right)' = C \frac{x^2 e^{-\int p(x)dx}}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{x}{\sin x} y_2 = \int \frac{C dx}{\sin^2 x} = -C \cot x$$

$$\Rightarrow y_2 = -C \frac{\cos x}{x} \Rightarrow y_2 = \frac{\cos x}{x} \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{C_1 \sin x + C_2 \cos x}{x}}}$$

II. משוואות לינאריות לא הומוגניות $y''+p(x)y'+g(x)y=f(x)$

שיטת הוריאציה :

ניח ש- $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ פתרון כללי למשוואה $y''+p(x)y'+g(x)y=0$ אזי פתרון כללי למשוואה $y''+p(x)y'+g(x)y=f(x)$ נחפש בצורה $y = M(x) y_1 + N(x) y_2$ כאשר הפונקציות

$$\left. \begin{aligned} M' y_1 + N' y_2 &= 0 \\ M' y_1' + N' y_2' &= f(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ניתן לקבל מהמערכת} \\ M(x), N(x) \end{array}$$

דוגמה 2 פתור $x y'' + 2y' + x y = 6 \cos x$

פתרון

מדוגמה 1 מקבלים $y_1 = \frac{\sin x}{x}, y_2 = \frac{\cos x}{x}$

$$\left. \begin{aligned} y'' + 2\frac{y'}{x} + y &= \frac{6 \cos x}{x} \\ y_1 = \frac{\sin x}{x}, y_2 = \frac{\cos x}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} M' \frac{\sin x}{x} + N' \frac{\cos x}{x} &= 0 \\ M' \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + N' \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} &= \frac{6 \cos x}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} M' \sin x + N' \cos x &= 0 \\ M' (x \cos x - \sin x) + N' (-x \sin x - \cos x) &= 6x \cos x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} M' &= 6 \cos^2 x \\ N' &= -6 \cos x \sin x \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} M &= 3x + 1.5 \sin 2x + C_1 \\ N &= 1.5 \cos 2x + C_2 \\ y &= M \cdot \frac{\sin x}{x} + N \cdot \frac{\cos x}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = (3x + 1.5 \sin 2x + C_1) \frac{\sin x}{x} + (1.5 \cos 2x + C_2) \frac{\cos x}{x} \Rightarrow$$

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{(3x + 3 \sin x \cos x) \sin x + 1.5(\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x}{x} =$$

$$= C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{3x \sin x + 1.5 \sin^2 x \cos x + 1.5 \cos^3 x}{x} =$$

$$= C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} + 3 \sin x + \frac{1.5 \cos x}{x} \Rightarrow y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_3 \frac{\cos x}{x} + 3 \sin x$$

III. משוואות לינאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים $(a, b, c \in \mathbb{R}) \quad ay'' + by' + cy = 0$

משוואה אופיינית $ar^2 + br + c = 0$

1) $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2 \Rightarrow y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2) $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 = r_2 = r \Rightarrow y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

3) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, r_{1,2} = \alpha \pm \beta i \Rightarrow y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

דוגמה 3 פתור: $y'' + 4y' = 0$

$$y'' + 4y' = 0 \Rightarrow r^2 + 4r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -4 \Rightarrow y_1 = e^{0 \cdot x} = 1, y_2 = e^{-4x} \Rightarrow y = C_1 + C_2 e^{-4x}$$

דוגמה 4 פתור: $y'' + 4y' + 4y = 0$

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \Rightarrow y_1 = e^{-2x}, y_2 = x e^{-2x} \Rightarrow y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

דוגמה 5 פתור: $y'' + 4y' + 13y = 0$

$$y'' + 4y' + 13y = 0 \Rightarrow r^2 + 4r + 13 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2 \pm 3i \Rightarrow \alpha = -2, \beta = 3 \Rightarrow$$

$$y_1 = e^{-2x} \cos 3x, y_2 = e^{-2x} \sin 3x \Rightarrow y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

דוגמה 6 פתור: $y'''' + 25y'' = 0$

$$y'''' + 25y'' = 0 \Rightarrow r^4 + 25r^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0, r_{3,4} = \pm 5i \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = \cos 5x, y_4 = \sin 5x$$

$$\Rightarrow y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 5x + C_4 \sin 5x$$

דוגמה 7 פתור: $y'''' + 18y'' + 81y = 0$

$$y'''' + 18y'' + 81y = 0 \Rightarrow r^4 + 18r^2 + 81 = 0 \Rightarrow (r^2 + 9)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2,3,4} = \pm 3i \Rightarrow y_1 = \cos 3x,$$

$$y_2 = x \cos 3x, y_3 = \sin 3x, y_4 = x \sin 3x \Rightarrow y = C_1 \cos 3x + C_2 x \cos 3x + C_3 \sin 3x + C_4 x \sin 3x$$

משוואות לינאריות לא הומוגניות
שיטת השוואת המקדמים.

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_k(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x),$$

אם

$$P_k(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k, \quad Q_l(x) = b_0 x^l + b_1 x^{l-1} + \dots + b_l$$

אזי נחפש פתרון פרטי למשוואה לא הומוגנית בצורה:

$$y_p(x) = e^{\alpha x} \left[(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) \cos \beta x + (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n) \sin \beta x \right] x^S$$

$$n = \max(k, l)$$

S הוא ריבוי של שורש $(\alpha + \beta i)$ למשוואה אופיינית $ar^2 + br + c = 0$

- 1) $\left. \begin{matrix} \alpha = 0, \beta = 0 \\ \alpha + \beta i = 0 \end{matrix} \right\} f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \Rightarrow y_p = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) x^S$
- 2) $\left. \begin{matrix} \beta = 0 \\ \alpha + \beta i = \alpha \end{matrix} \right\} f(x) = e^{\alpha x} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) \Rightarrow y_p = e^{\alpha x} (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) x^S$
- 3) $\left. \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta i = \beta i \end{matrix} \right\} f(x) = P_k(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x \Rightarrow y_p = (M_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x) x^S$

דוגמה 8 $y'' + 3y' = e^{-3x} (8x \cos 4x + 7 \sin 4x)$

$$r_1 = 0, r_2 = -3, \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \Rightarrow S = 0,$$

$$f(x) = e^{-3x} (8x \cos 4x + 7 \sin 4x) \Rightarrow \alpha + \beta i = -3 + 4i$$

$$n = 1, \quad y_p = e^{-3x} ((Ax + B) \cos 4x + (Mx + D) \sin 4x)$$

דוגמה 9 $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} \cos x$

$$r_{1,2} = -1 \pm i, \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \Rightarrow S = 1$$

$$f(x) = 3e^{-x} \cos x \Rightarrow \alpha + \beta i = -1 + i$$

$$n = 0 \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \Rightarrow y_p = e^{-x} (A \cos x + B \sin x)x$$

דוגמה 10 $y'''' + 9y' = 8x + x^2 e^{-x} - 1$

$$f(x) = 8x - x^2 e^{-x} - 1 \Rightarrow f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad f_1(x) = 8x - 1, \quad f_2(x) = -x^2 e^{-x}$$

$$y_p = y_{1p} + y_{2p}$$

$$r_1 = 0, r_{2,3} = \pm 3i, \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \Rightarrow S = 1$$

$$f_1(x) = 8x - 1 \Rightarrow \alpha + \beta i = 0$$

$$n = 1 \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \Rightarrow y_{1p} = (Ax + B)x$$

$$r_1 = 0, r_{2,3} = \pm 3i, \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \Rightarrow S = 0$$

$$f_2(x) = -x^2 e^{-3x} \Rightarrow \alpha + \beta i = -3$$

$$n = 2 \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \Rightarrow y_{2p} = (Mx^2 + Nx + D)e^{-3x}$$

תרגילים

I. פתור את המשוואות כאשר נתון פתרון אחד y_1

1) $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$ 2) $xy'' + 2y' - xy = 0$, $y_1 = e^x / x$

II. פתור את המשוואות

$x^2 y'' - 3xy' - 5y = 0$ של המשוואה $x^2 y'' - 3xy' - 5y = x^2 \ln x$ עבור $x > 0$ ידוע ש $y_1 = \frac{1}{x}$

$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 6x$ (2) ידוע ש $y_1 = \frac{1}{x-1}$, $y_2 = \frac{1}{x+1}$ פתרונות של המשוואה

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

III. פתור את המשוואות

- 1) $2y'' + 5y' - 3y = 0$ 5) $\frac{d^2 s}{dt^2} + 9s = 0, s(0) = 2, s'(0) = 1$ 9) $y'''' + 2y'' - 3y = 0$
 2) $y'' - 8y' + 16y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$ 6) $\frac{d^2 r}{d\varphi^2} + 10\frac{dr}{d\varphi} + 25r = 0$ 10) $y'''' + 6y'' = 0$
 3) $y'' + 2y' + 5y = 0$ 7) $y'''' + 8y'' + 16y = 0$ 11) $y'''' + 8y = 0$
 4) $\frac{d^2 x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} = 0$ 8) $y'''' + 16y = 0$

IV. פתור את המשוואות

- 1) $y'' + y = 4x e^x$ 4) $y'' + 4y = 5 \cos 2t$
 2) $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$ 5) $y'' - 9y = 12e^{3t} - 6 \sin 3t$
 3) $y'' + 2y' + y = x e^{-x}, y(0) = 1, y'(0) = 0$ 6) $xy'' - 2xy' + xy = e^x$
 7) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ 8) $y'''' + 4y'' = 6x + 4 + 8e^{-2x}$

תשובות תשובות לתרגול 5

I. 1) $y = C_1(x^2 - 1) + C_2 x$

2) $y = (C_1 e^x + C_2 e^{-x}) / x$

II.

1) $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^5 - \frac{1}{9} x^2 \ln x$

2) $y = \frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{x+1} + x$

III.

1) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{0.5x}$

7) $y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x$

2) $y = e^{4x}(1-x)$

8) $y = e^{\sqrt{2}x} (C_1 \cos(x\sqrt{2}) + C_2 \sin(x\sqrt{2})) + e^{-\sqrt{2}x} (C_3 \cos(x\sqrt{2}) + C_4 \sin(x\sqrt{2}))$

3) $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

9) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x\sqrt{3}) + C_4 \sin(x\sqrt{3})$

4) $x = C_1 + C_2 e^{4t}$

5) $s = 2 \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t$

10) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{-6x}$

6) $r = (C_1 + C_2 \varphi) e^{-5\varphi}$

11) $y = C_1 e^{-2x} + e^x (C_2 \cos(x\sqrt{3}) + C_3 \sin(x\sqrt{3}))$

IV.

1) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2) e^x$

2) $y = C_1 + C_2 e^{5x} - 0.2x^3 - 0.12x^2 - 0.048x + 0.02(\cos 5x - \sin 5x)$

3) $y = e^{-x} (1 + x + x^3 / 6)$

4) $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + 1.25t \sin 2t$

5) $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} + 2te^{3t} + \frac{1}{3} \sin 3t$

6) $y = e^x (x \ln |x| + C_1 + C_2 x)$

7) $y = (-x + C_1) \cos x + (\ln |\sin x| + C_2) \sin x$

8) $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + 0.25x^3 + 0.5x^2 + 0.25e^{-2x}$

6 תרגול

מערכות של משוואות דיפרנציאליות לינאריות

פתור

1.
$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4x \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x' = z \\ y' = -4x - y - 4z \\ z' = -y \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x - 2y + 2 \sin t \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = 3x + 3y - 2z \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x' - x - 5y = 1 \\ y' + 2x + y = e^t \\ x|_{t=0} = y|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x' = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1} \\ y' = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1} \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$$

תשובות תשובות ל תרגול 6

1.
$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} \\ y = C_1 e^t - 3C_2 e^{-t} \\ z = C_1 e^t - 5C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} \\ y = -C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{2t} - 4C_3 e^{-2t} \\ z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - 2C_3 e^{-2t} \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} + 3e^{5t} \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} + e^{5t} \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x = 3C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 3 \sin t \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 2 \sin t - \cos t \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^t \\ y = C_1 + C_3 e^t \\ z = 3C_1 + C_2 e^t + C_3 e^t \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ y = e^{-6t} (C_1 (\cos t - \sin t) + C_2 (\cos t + \sin t)) \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x = -\frac{11}{18} \cos 3t + \frac{1}{6} \sin 3t + \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{9} \\ y = \frac{2}{9} \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t - \frac{2}{9} \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x = C_1 + 2C_2 e^{-t} + 2e^{-t} \ln |e^t - 1| \\ y = -2C_1 - 3C_2 e^{-t} - 3e^{-t} \ln |e^t - 1| \end{cases}$$

7 תרגול

שיעור חזרה

פתור משוואות מסדר ראשון :

1. $xy' - y = xe^{y/x}$ 2. $t s' = s + t^2 \sin^2 t$ 3. $(1-x^2)t' - xt = xt^2, t(0) = 0.5$
 4. $\begin{cases} 2x \cos^2 y dx + (8\sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y) dy = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ 5. $\cos y dx + (\sin y + e^x) dy = 0$
 6. $2xy dx - (3y + x^2) dy = 0$ 7. $(x + y + 1) dx = (2x + 2y - 1) dy$
 8. $(x + ye^{-1/y})y' = y^2$ 9. $r' - r \tan \varphi + r^2 \cos \varphi = 0$

.II פתור משוואות :

10. $y''' = \frac{1}{x^3}$ 11. $xy'' = y'(\ln y' - \ln x)$ 12. $y'' \tan y = 2(y')^2$
 13. $2y(y')^3 + y'' = 0, y(0) = 0, y'(0) = -3$

.III פתור משוואה כאשר נתון פתרון אחד $14. x^2 y'' - xy' + y = 0, y_1 = x$

.IV פתור

15. $y'' - 16y = 0$ 16. $y'' + 16y = 0$ 17. $y''' + 9y' = 0$
 18. $y^V + 16y' = 0$ 19. $y^{IV} - 4y''' + 13y'' = 0$
 20. $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$ 21. $y'' - 4y' = 4x - 5 + 10e^x \cos x$
 22. $x'' + x = \cos t + \cos 2t$
 23. $y'' - 2y' + 10y = 74 \sin 3x, y(0) = 6, y'(0) = 3$ 24. $y'' + y = 1 / \cos^3 x$

.V פתור

25. $\begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = y - x + z \\ z' = x - z \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x' = 2y - x \\ y' = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1} \end{cases}$

7 תשובות לתרגול

1. $1 + e^{y/x} \ln |Cx| = 0$ 2. $s = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{4} \sin 2t + Ct$ 3. $t = \frac{1}{3\sqrt{|1-x^2|} - 1}$
 4. $x^2 \cos^2 y + 6y \sqrt[3]{y} - 1 = 0$ 5. $y = C + e^{-x} \cos y$ 6. $x^2 = y(C + 3 \ln |y|), y = 0$
 7. $C + 2y = x + \ln |x + y|, y = -x$ 8. $C + \ln |y| = xe^{1/y}$
 9. $r = \frac{1}{(\varphi + C) \cos \varphi}, r = 0$ 10. $y = 0.5 \ln |x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$
 11. $y = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1} \left(x - \frac{1}{C_1} \right) + C_2, y = \frac{e}{2} x^2 + C$
 12. $C_1 x + C_2 = -\cot y, (y = C, C \neq 0.5\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z})$
 13. $3x = y^3 - y$ 14. $y = x(C_1 + C_2 \ln |x|)$

משוואות לינאריות (המשך)

משוואת אוילר מסדר 2 $(a_1, a_0 \in \mathbf{R}) \quad x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$

דרך 1 ההצבה $y = x^\lambda$ במשוואת אוילר נותנת $\lambda(\lambda - 1) + a_1 \lambda + a_0 = 0$

אם λ_1, λ_2 פתרונות של משוואה זאת אזי

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}$

2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow y = C_1 x^\lambda + C_2 x^\lambda \ln x$

3) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}, \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \Rightarrow y = x^\alpha (C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x))$

$(a_1, a_0, a, b \in \mathbf{R}) \quad \begin{cases} (ax+b)^2 y'' + a_1(ax+b)y' + a_0 y = 0 \\ y = (ax+b)^\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda(\lambda-1) + a_1 \lambda + a_0 = 0$

דרך 2 ההצבה $x = e^t$

$x = e^t \Rightarrow t = \ln x \Rightarrow y = y(t(x)) \Rightarrow y'_x = y'_t \cdot t'_x \Rightarrow y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x}, \quad y''_{xx} = y''_{tt} \cdot \frac{1}{x^2} - y'_t \cdot \frac{1}{x^2}$

$\{x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0, \quad y'_x = y'_t / x, \quad y''_{xx} = (y''_{tt} - y'_t) / x^2\} \Rightarrow y''_{tt} + (a_1 - 1) y'_t + a_0 y = 0$

משוואת אוילר מסדר n

$(ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-1} (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 (ax+b) y' + a_0 y = 0$

$a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathbf{R},$

ההצבה $y = (ax+b)^\lambda$
דוגמאות

1. $(x > 0) \quad \left. \begin{aligned} 2(x+5)^2 y'' + 3(x+5) y' - y = 0, \\ y = (x+5)^\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow$

$2\lambda(\lambda-1) + 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -1 \Rightarrow y = C_1 (x+5)^{0.5} + C_2 (x+5)^{-1}$

2. $(x > 0) \quad x^3 y''' + x y' - y = 0$

$\left. \begin{aligned} x^3 y''' + x y' - y = 0 \\ y = x^\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \Rightarrow y = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x \ln^2 x$

3. $(x > 0) \quad x^2 y'' + 3x y' + 5y = 0$

$\left. \begin{aligned} x^2 y'' + 3x y' + 5y = 0 \\ y = x^\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i \Rightarrow y = \frac{C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \sin(2 \ln x)}{x}$

תרגילים

I. פתור את המשוואות

- | | |
|---|--|
| 1) $x^2 y'' - 4x y' + 6y = 0, (x > 0)$ | 7) $(2x + 3)^2 y'' + 2(2x + 3) y' - 4y = 0, \left(x > -\frac{2}{3}\right)$ |
| 2) $x^2 y''' = 2y', (x > 0)$ | 8) $x^2 y'' + x y' + 4y = 10x, (x > 0)$ |
| 3) $x^2 y'' - 3x y' + 5y = 0, (x > 0)$ | 9) $x^3 y'' - 2x y = 6 \ln x, (x > 0)$ |
| 4) $x^3 y'''' - 6x y'' = 0, (x > 0)$ | 10) $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2, (x > 0)$ |
| 5) $x^4 y'''' + 6x^3 y''' + 6x^2 y'' - 2y = 0, (x > 0)$ | 11) $x^2 y'' - x y' + y = 2x, (x > 0)$ |
| 6) $(x - 2)^2 y'' - 3(x - 2) y' + 4y = 0, (x > 2)$ | 12) $x^2 y'' - 2x y' + 2y + x - 2x^3 = 0, (x > 0)$ |

חזרה

פתור משוואות :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $xy' - y = xe^{y/x}$ | 2. $t s' = s + t^2 \sin^2 t$ | 3. $(1 - x^2)t' - xt = xt^2, t(0) = 0.5$ |
| 4. $2x \cos^2 y dx + (8\sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y) dy = 0, y(1) = 0$ | 5. $\cos y dx + (\sin y + e^x) dy = 0$ | |
| 6. $2xy dx - (3y + x^2) dy = 0$ | 7. $(x + y + 1) dx = (2x + 2y - 1) dy$ | |
| 8. $(x + ye^{-1/y}) y' = y^2$ | 9. $r' - r \tan \varphi + r^2 \cos \varphi = 0$ | |
| 10. $y''' = \frac{1}{x^3}$ | 11. $xy'' = y'(\ln y' - \ln x)$ | 12. $y'' \tan y = 2(y')^2$ |
| 13. $2y(y')^3 + y'' = 0, y(0) = 0, y'(0) = -3$ | | |
| 14. $x^2 y'' - xy' + y = 0, y_1 = x$ | | |
| 15. $y'' - 16y = 0$ | 16. $y'' + 16y = 0$ | 17. $y'' + 9y' = 0$ |
| 18. $y^V + 16y' = 0$ | 19. $y^{IV} - 4y''' + 13y'' = 0$ | |
| 20. $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$ | 21. $y'' - 4y' = 4x - 5 + 10e^x \cos x$ | |
| 22. $x'' + x = \cos t + \cos 2t$ | | |
| 23. $y'' - 2y' + 10y = 74 \sin 3x, y(0) = 6, y'(0) = 3$ | | |
| 24. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$ | 25. $x^2 y'' - 3x y' + 4y = \ln x$ | |
| 26. $x^2 y'' + x y' + 4y = \sin(\ln x)$ | | |
| 27. $y'' + \frac{\mu}{x^2} y = 0 (x > 0) \quad a) \mu > 0.25 \quad b) \mu = 0.25 \quad c) \mu < 0.25$ | | |

תשובות :

1) $y = C_1 x^2 + C_2 x^3$

2) $y = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x^3$

3) $y = x^2 (C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x))$

4) $y = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x + C_4 x^5$

5) $y = C_1 x^{\sqrt{2}} + C_2 x^{-\sqrt{2}} + C_3 \cos(\ln x) + C_4 \sin(\ln x)$

6) $y = C_1 (x-2)^2 + C_2 (x-2)^2 \ln(x-2)$

7) $y = C_1 (2x+3) + C_2 (2x+3)^{-1}$

8) $y = C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \sin(2 \ln x) + 2x$

9) $y = C_1 x^2 + \frac{1}{x} \left(C_2 - \frac{2}{3} \ln x - \ln^2 x \right)$

10) $y = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x^3 + x^3 \ln x - 2x^2$

11) $y = C_1 x + C_2 x \ln x + x \ln^2 x$

12) $y = C_1 x + C_2 x^2 + x \ln x + x^3$

תשובות (חזרה)

1. $1 + e^{y/x} \ln |Cx| = 0$ 2. $s = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{4} \sin 2t + Ct$ 3. $t = \frac{1}{3\sqrt{|1-x^2|} - 1}$

4. $x^2 \cos^2 y + 6y \sqrt[3]{y} - 1 = 0$ 5. $y = C + e^{-x} \cos y$ 6. $x^2 = y(C + 3 \ln |y|)$, $y = 0$

7. $C + 2y = x + \ln |x + y|$, $y = -x$ 8. $C + \ln |y| = x e^{1/y}$

9. $r = \frac{1}{(\varphi + C) \cos \varphi}$, $r = 0$ 10. $y = 0.5 \ln |x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

11. $y = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1} \left(x - \frac{1}{C_1} \right) + C_2$, $y = \frac{e}{2} x^2 + C$

12. $C_1 x + C_2 = -\cot y$, $\begin{cases} y = C \\ C \neq 0.5\pi + k\pi, k \in Z \end{cases}$ 13. $3x = y^3 - y$

14. $y = x(C_1 + C_2 \ln |x|)$

15. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$ 16. $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$

17. $y = C_1 + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$

18. $y = C_1 + e^{\sqrt{2}x} (C_2 \cos(x\sqrt{2}) + C_3 \sin(x\sqrt{2})) + e^{-\sqrt{2}x} (C_4 \cos(x\sqrt{2}) + C_5 \sin(x\sqrt{2}))$

19. $y = C_1 + C_2 x + e^{2x} (C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x)$

20. $y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x + 0.5x^3)$

21. $y = C_1 + C_2 e^{4x} - 0.5x^2 + x - e^x (2 \cos x + \sin x)$

22. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2} t \sin t - \frac{1}{3} \cos 2t$

23. $y = e^x (\sin 3x - 6 \cos 3x) + 12 \cos 3x + 2 \sin 3x$

$$24. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2 \cos x}$$

$$25. y = x^2 (C_1 + C_2 \ln x) + 0.25 \ln x + 0.25$$

$$26. y = C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \sin(2 \ln x) + \frac{1}{3} \sin(\ln x)$$

$$27. a) r_1 = 0.5 + \sqrt{0.25 - \mu} \quad r_2 = 0.5 - \sqrt{0.25 - \mu}, \quad y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$$

$$b) r_{1,2} = 0.5, \quad y = x^{0.5} (C_1 + C_2 \ln x)$$

$$c) r_{1,2} = 0.5 \pm \sqrt{0.25 - \mu} = 0.5 \pm \tau i, \quad \tau = \sqrt{0.25 - \mu}$$

$$y = x^{0.5} (C_1 \cos(\tau \ln x) + C_2 \sin(\tau \ln x))$$