

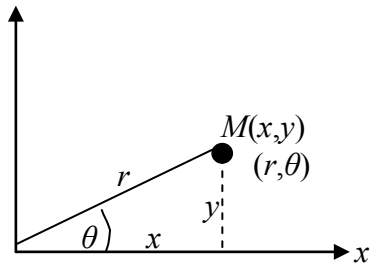
משוואות דיפרנציאליות

מס' הקורס 201-1-9461 הנ.מכונות

פרק 1 משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

תרגול 1

I. מספרים מרוכבים



מספר מדומה : $i^2 = -1$, i

מספר מרוכב : $z = x + yi$, $x, y \in \mathbf{R}$

הפעולות בין שני מספרים מרוכבים :

$$z_1 = -1 + 3i, z_2 = 2 + 5i$$

$$z_1 + z_2 = (-1 + 2) + (3 + 5)i = 1 + 8i, \quad z_1 - z_2 = (-1 - 2) + (3 - 5)i = -3 - 2i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (-1 + 3i) \cdot (2 + 5i) = (-2 - 15) + i(-5 + 6) = -17 + i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{4 + 25} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$

ההצגה הטריגונומטרית :

$$z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = y/x$$

דוגמאות :

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right), \quad -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

נוסחאות :

$$r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

$$(r(\cos \theta + i \sin \theta))^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad n \in \mathbf{N}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

דוגמאות :

$$1. (-1 + i\sqrt{3})^3 = \left(2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right)^3 = 2^3 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \cdot 3 \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \cdot 3 \right) \right) = 8$$

$$2. z^4 + 16 = 0 \Rightarrow z^4 = -16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-16} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

תרגיליםI. מספרים מרוכבים

1. $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 2 + 4i$
- חשב : (a) $z_1 - z_2$, $z_1 + z_2$ (b) $z_1 \cdot z_2$, z_1^2 , z_1^3 (c) $\frac{z_1}{z_2}$
2. חשב : i^{10} , i^{83} , i^{97} , i^{4n} , i^{4n+1} , i^{4n+2} , i^{4n+3}
3. פתור את המשוואות : $z^2 - 2z + 2 = 0$, $z^2 + 2z + 5 = 0$
4. חשב בעזרת נוסחת מואבר : $(-1+i)^5$, $(\sqrt{3}+i)^8$
5. מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות :
- (1) $z^3 - 1 = 0$ (2) $z^2 + 16i = 0$ (3) $z^3 + 8 = 0$ (4) $z^4 - 1 = 0$

תשובות

1. (a) $1 - 6i$, $5 + 2i$ (b) $14 + 8i$, $5 - 12i$, $-9 - 46i$ (c) $-0.1 - 0.8i$
2. -1 , $-i$, i , 1 , i , $-i$, -1 , $-i$
3. $1 \pm i$, $-1 \pm 2i$
4. $4 - 4i$, $-128 - 128\sqrt{3}i$
5. (a) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (b) $2\sqrt{2}(1-i)$, $2\sqrt{2}(-1+i)$ (c) $-2, 1 \pm \sqrt{3}i$ (d) $\pm 1, \pm i$

II. אינטגרלים

1. $\int \left(2 \cos \frac{x}{3} - \frac{\sin 6x}{4} + 7e^{-5x} - 6\sqrt{3x} + \frac{5}{x} - \pi x^8 + 9\sqrt[3]{x} - \frac{7}{\sin^2 3x} + \frac{5}{\cos^2 4x} - 2 \right) dx$
2. a) $\int (2x-3)^{10} dx$ b) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$ d) $\int \frac{x dx}{3-2x^2}$ e) $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$
3. a) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$ d) $\int \frac{dx}{2-3x^2}$ e) $\int \frac{x dx}{4+x^4}$ f) $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$
4. a) $\int x e^{-x^2} dx$ b) $\int \left(\sin \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{x^2}$ c) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(8x^3+27)^2}}$ d) $\int \frac{\ln^2 5x}{x} dx$ e) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$
- f) $\int \sin^5 2x \cos 2x dx$ g) $\int \tan 5x dx$ h) $\int \cot 3x dx$ i) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}}$ j) $\int \frac{dx}{\sin x}$
- k) $\int \frac{dx}{\cos x}$ l) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$ m) $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \sqrt{1-x^2}}$ n) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ o) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$
5. a) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ b) $\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx$ c) $\int \frac{(8x-11) dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$ d) $\int \frac{(x+2) dx}{x^2+2x+2}$
- e) $\int \frac{(3x-1) dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ f) $\int \frac{(x-2) dx}{x^2-7x+12}$
6. a) $\int \sin 3x \sin 5x dx$ b) $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx$ c) $\int \sin x \cos(x+a) dx$ d) $\int \cos^2 3x dx$
- e) $\int \sin^3 5x dx$ f) $\int \cos^4 2x dx$ g) $\int \tan^3 7x dx$
7. a) $\int \frac{(2x+3) dx}{(x-2)(x+5)}$ b) $\int \frac{x^3 dx}{x^2+x-2}$ c) $\int \frac{(x^3+1) dx}{x^3-5x^2+6x}$ d) $\int \frac{(x^2+1) dx}{(x+1)^2(x-1)}$ e) $\int \frac{x dx}{x^3-1}$
8. a) $\int \ln x dx$ b) $\int x e^{-x} dx$ c) $\int x^2 \sin 3x dx$ d) $\int \arcsin 2x dx$ e) $\int x \arctan \frac{x}{3} dx$
9. a) $\int e^{3x} \sin 5x dx$ b) $\int e^{-2x} \cos 3x dx$ c) $\int \sqrt{5-x^2} dx$ d) $\int \sqrt{x^2+8} dx$

תשובות

1. $6 \sin \frac{x}{3} + \frac{\cos 6x}{24} - \frac{7}{5} e^{-5x} - 4x\sqrt{3x} + 5 \ln|x| - \frac{\pi x^9}{9} + \frac{27}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{7}{3} \cot 3x + \frac{5}{4} \tan 4x - 2x + C$

2. a) $\frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C$ b) $C - \sqrt{1-x^2}$ c) $0.25 \sqrt[3]{(1+x^3)^4} + C$

d) $C - 0.25 \ln|3-2x^2|$ e) $C - \frac{0.5}{1+x^2}$

3. a) $\frac{\sqrt{6}}{6} \arctan \frac{x\sqrt{6}}{2} + C$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin \frac{x\sqrt{6}}{2} + C$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3} \ln|\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2-2}| + C$

d) $\frac{\sqrt{6}}{12} \ln \left| \frac{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}{x\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right| + C$ e) $0.25 \arctan \frac{x^2}{2} + C$ f) $\frac{\sqrt{2}}{16} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right| + C$

4. a) $C - \frac{1}{2} e^{-x^2}$ b) $\cos \frac{1}{x} + C$ c) $\frac{1}{8} \sqrt[3]{8x^3 + 27} + C$ d) $\frac{\ln^3 5x}{3} + C$ e) $\ln|\ln(\ln x)| + C$

f) $\frac{1}{12} \sin^6 2x + C$ g) $C - \frac{1}{5} \ln|\cos 5x|$ h) $C + \frac{1}{3} \ln|\sin 3x|$ i) $\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$

j) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + C$ or $\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$ k) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C$ or $\ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C$

l) $\frac{1}{2} \arctan^2 x + C$ m) $C - \frac{1}{\arcsin x}$ n) $C - \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$ o) $C + \tan \frac{x}{2}$

5. a) $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$ b) $\frac{3}{2} \ln(x^2+9) - \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C$

c) $C - 8\sqrt{5+2x-x^2} - 3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}}$ d) $0.5 \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + C$

e) $3\sqrt{x^2+2x+2} - 4 \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + C$ f) $\ln \frac{(x-4)^2}{|x-3|} + C$

6. a) $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C$ b) $3 \sin \frac{x}{6} + \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + C$ c) $C - \frac{1}{4} \cos(2x+a) - \frac{\sin a}{2} x$

d) $\frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{2} x + C$ e) $C - \frac{1}{5} \cos 5x + \frac{1}{15} \cos^3 5x$

f) $\frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + \frac{3}{8} x + C$ g) $\frac{1}{14} \tan^2 7x + \frac{1}{7} \ln|\cos 7x| + C$

7. a) $\ln|(x-2)(x+5)| + C$ b) $C - x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{8}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{3} \ln|x-1|$

c) $x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + C$ d) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C$

e) $\frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

8. a) $C - x(1-\ln x)$ b) $C - (x+1)e^{-x}$ c) $C - \frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + \frac{2}{9} x \sin 3x$

d) $x \arcsin 2x + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C$ e) $C - \frac{3}{2} x + \frac{9+x^2}{2} \arctan \frac{x}{3}$

9. a) $\frac{3 \sin 5x - 5 \cos 5x}{34} e^{3x} + C$ b) $\frac{3 \sin 3x - 2 \cos 3x}{13} e^{-2x} + C$

c) $\frac{x}{2} \sqrt{5-x^2} + \frac{5}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C$ d) $\frac{x}{2} \sqrt{x^2+8} + 4 \ln|x+\sqrt{x^2+8}| + C$

פתרונות חלקיים

$$1. \int \frac{1}{\cos^2 4x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos^2 4x} d(4x) = \frac{1}{4} \tan(4x) + C, \quad \int \cos \frac{x}{3} dx = 3 \int \cos \frac{x}{3} d \frac{x}{3} = 3 \sin \frac{x}{3} + C$$

$$\int \sqrt{3x} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{3x} d(3x) = \frac{1}{3} (3x)^{3/2} \frac{2}{3} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} x \sqrt{x} + C$$

$$2. a) \int (2x-3)^{10} dx = \frac{1}{2} \int (2x-3)^{10} d(2x-3) = \frac{(2x-3)^{11}}{22} + C$$

$$b) \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{0.5} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$3. a) \int \frac{dx}{2+3x^2} = \int \frac{dx}{2+(\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{2+(\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan(\sqrt{1.5}x) + C$$

$$f) \int \frac{x^3 dx}{x^8-2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx^4}{(x^4)^2-2} = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{z^2-2} = \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} \ln \left| \frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{\sqrt{2}}{16} \ln \left| \frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}} \right| + C$$

$$4. b) \int \left(\sin \frac{1}{x} \right) \frac{dx}{x^2} = -\int \left(\sin \frac{1}{x} \right) d \frac{1}{x} = \cos \frac{1}{x} + C$$

$$e) \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{d \ln x}{\ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{dz}{z \ln z} = \int \frac{d \ln z}{\ln z} = \ln |\ln z| + C = \ln |\ln(\ln x)| + C$$

$$f) \int \sin^5 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin^5 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{2} \int z^5 dz = \frac{1}{2} \frac{\sin^6 2x}{6} + C$$

$$g) \int \tan 5x dx = \int \frac{\sin 5x dx}{\cos 5x} = -\frac{1}{5} \int \frac{(\cos 5x)' dx}{\cos 5x} = -\frac{1}{5} \ln |\cos 5x| + C$$

$$i) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}} = -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{\cos^3 x}} = -\int u^{-3/2} du \quad k) \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d \sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$m) \int \frac{dx}{\arcsin^2 x \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{t^2} \quad o) \int \frac{dx}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2(0.5x)}$$

$$\arcsin x = t$$

$$5. a) \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - \frac{1}{2} \cdot 2(1-x^2)^{1/2} + C$$

$$c) \int \frac{(8x-11) dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{8(z+1)-11}{\sqrt{6-z^2}} dz = \int \frac{8z-3}{\sqrt{6-z^2}} dz$$

$$5+2x-x^2 = -(x^2-2x-5) = -[(x-1)^2-6] = 6-(x-1)^2, \quad x-1=z, \quad dx=dz$$

$$6. a) \int \sin 3x \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int [\cos(3x-5x) - \cos(3x+5x)] dx$$

$$e) \int \sin^3 5x dx = \int \sin 5x \sin^2 5x dx = \int \sin 5x (1-\cos^2 5x) dx = -\frac{1}{5} \int (1-u^2) du$$

$$\cos 5x = u \Rightarrow -5 \sin 5x dx = du$$

$$f) \int \cos^4 2x dx = \int \frac{(1+\cos 4x)^2}{4} dx = 0.25 \int \left(1+2\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2} \right) dx$$

$$g) \int \tan^3 7x dx = \frac{1}{7} \int u^3 \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{7} \int \frac{(u^3+u)-u}{1+u^2} du = \frac{1}{7} \int \left(u - \frac{u}{1+u^2} \right) du$$

$$\tan 7x = u \Rightarrow 7x = \arctan u \Rightarrow dx = \frac{1}{7} \frac{du}{1+u^2}$$

$$7.a) \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+5} \Rightarrow 2x+3 = a(x+5) + b(x-2) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -5 \Rightarrow -7 = -7b \\ x = 2 \Rightarrow 7 = 7a \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{(2x+3)dx}{(x-2)(x+5)} = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+5}$$

$$d) \int \frac{(x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-1)}, \quad \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-1} \Rightarrow$$

$$x^2 + 1 = a(x+1)(x-1) + b(x-1) + c(x+1)^2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 \left| \begin{array}{l} 1 = a + c \\ 0 = b + 2c \\ 1 = -a - b + c \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 0.5 \\ b = -1 \\ c = 0.5 \end{array}$$

תרגול 2

משוואות דיפרנציאליות

I. משוואות דיפרנציאליות מסדר n :

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0, \quad y = f(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

פתרון פרטי, פתרון כללי, פתרון מיוחד, פתרון של בעיית קושי

דוגמא 1 הוכח כי הפונקציה $y = Ce^{-2x} + 3x^2 - 2x + 1$ היא פתרון כללי של המשוואה

$$y' + 2y = 6x^2 + 2x$$

פתרון גוזרים את הפונקציה $y = Ce^{-2x} + 3x^2 - 2x + 1$ ונמצא $y' = -2Ce^{-2x} + 6x - 2$. לאחר הצבה במשוואה נקבל

$$y' + 2y = (-2Ce^{-2x} + 6x - 2) + 2(Ce^{-2x} + 3x^2 - 2x + 1) = -2Ce^{-2x} + 6x - 2 + 2Ce^{-2x} + 6x^2 - 4x + 2 = 6x + 2x^2 \Rightarrow 6x + 2x^2 = 6x + 2x^2$$

דוגמא 2 נניח שמשוואה $x^2 + y^2 = 5(x + y)$ מגדירה את הפונקציה סתומה $y = y(x)$. הוכח כי הפונקציה

$$(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$$
 מקיימת את המשוואה $y = y(x)$

פתרון

$$x^2 + y^2 = 5(x + y) \Rightarrow (x^2 + y^2)'_x = 5(x + y)'_x \Rightarrow 2x + 2yy' = 5 + 5y' \Rightarrow y' = \frac{2x - 5}{5 - 2y} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} y' &= \frac{2x - 5}{5 - 2y} \cdot \frac{(x + y)}{(x + y)} = \frac{2x^2 + 2xy - 5(x + y)}{5(x + y) - 2xy - 2y^2} \\ 5(x + y) &= x^2 + y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y' = \frac{2x^2 + 2xy - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2xy - 2y^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - y^2 - 2xy} \Rightarrow (x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$$

תרגילים

I.

1. בדוק האם $y = f(x)$ פתרונות למשוואה $y'' + 4y = 0$:

$$1.1) y = 3 \sin 2x, \quad 1.2) y = \cos 2x - \sin 2x, \quad 1.3) y = 5 - 4 \cos 2x,$$

2. משוואה $y^3 + 3y - x^3 = 4$ מגדירה פונקציה סתומה $y = f(x)$.

האם $y = f(x)$ פתרון למשוואה $y' = x^2 / (y^2 + 1)$?

3. האם $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - 2x$ פתרון כללי למשוואה $y'' - 2y' - 3y = 6x + 4$?

4. הפתרון כללי של המשוואה $x + y y' = 0$ הוא $x^2 + y^2 = C$.

מצא הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה $y(-3) = 4$.

5. פתרון כללי של משוואה דיפרנציאלית הוא $C_1 x - C_2^2 y = \ln |C_1 x + 1| + C_2$.

נתון ש $y = f(x)$ הוא פתרון למשוואה :

$$5.1) y = x^2 + C, \quad 5.2) y = x - \ln |x + 1| + 3, \quad 5.3) y = C, \quad 5.4) y = 4x - 16 \ln |x + 4|,$$

האם $y = f(x)$ פתרון מיוחד למשוואה ?

תשובות :

1.1	1.2	1.3	2	3	4	5.1	5.2	5.3	5.4
כן	כן	לא	כן	כן	$y = \sqrt{25 - x^2}$	כן	לא	כן	לא

II. הוכח כי הפונקציות $y = y_1(x)$ הנתונות הן פתרונות פרטיים של המשוואות דיפרנציאליות המתאימות

1) $y' = \frac{1+y^2}{x}$	$y_1(x) = \tan \ln x$
2) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$	$y_1(x) = \ln(2x^2 + 1)$
3) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$	$y_1(x) = 0.5(1 + x^2)$
4) $xy' \ln x - y = x^3(3 \ln x - 1)$	$y_1(x) = \ln x + x^3$
5) $2y' \sin x + y \cos x = y^3(x \cos x - \sin x)$	$y_1(x) = 1/\sqrt{x}$
6) $x^2y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$	$y_1(x) = 0.5x(7 - \ln x)$

III. משוואה $F(x, y(x)) = 0$ מגדירה את הפונקציה סתומה $y = f(x)$. הוכח כי הפונקציות $y = y(x)$ הן פתרונות פרטיים של המשוואות הדיפרנציאליות המתאימות

	$F(x, y(x)) = 0$
1) $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$	$y^2 - 3xy + 2x^2 - 1 = 0$
2) $x\sqrt{1+y^2} + y y' \sqrt{1+x^2} = 0$	$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \sqrt{10} = 0$

משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

II. משוואות עם משתנים ניתנים להפרדה

$$f_1(x) \cdot g_1(y) dx + f_2(x) \cdot g_2(y) dy = 0$$

$$\frac{f_1(x) \cdot g_1(y) dx + f_2(x) \cdot g_2(y) dy}{g_1(y) \cdot f_2(x)} = 0 \Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0$$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = -\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy, f_2(x) \neq 0, g_1(y) \neq 0$$

בדוק $f_2(x) = 0, g_1(y) = 0$!

או $y' = f(x) \cdot g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx, g(y) \neq 0$$

בדוק $g(y) = 0$

דוגמאות:

$$\boxed{(\sqrt{xy} - \sqrt{x}) dy + y dx = 0} \quad 1.$$

פתרון א.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}-1) dy + y dx}{\sqrt{x} y} = 0 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow (\sqrt{xy} - \sqrt{x}) dy + y dx = 0$$

$$2\sqrt{y} - \ln|y| + 2\sqrt{x} = C \Leftrightarrow \int \frac{\sqrt{y}-1}{y} dy + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = C \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}-1}{y} dy + \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0$$

ב. האם $x=0$ פתרון? כן, (בדוק!); האם $y=0$ פתרון? כן, (בדוק!);

ג. תשובה: $2\sqrt{y} - \ln y + 2\sqrt{x} = C, x=0, y=0$

$$\boxed{(1+t^2) x' = tx} \quad 2.$$

פתרון א.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{x} = \frac{t dt}{1+t^2} \Leftrightarrow (1+t^2) dx = t x dt \Leftrightarrow \begin{cases} (1+t^2) x' = tx \\ x' = \frac{dx}{dt} \end{cases} \\ x \neq 0 \end{aligned} \right\}$$

$$x = C\sqrt{1+t^2} \Leftrightarrow \ln|x| = \frac{1}{2} \ln|1+t^2| + \ln|C|$$

ב. האם $x=0$ פתרון? כן, (בדוק!);

ג. תשובה: $x = C\sqrt{1+t^2}$

$$\boxed{y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, y' \cdot (\sin x)^2 \cdot \ln y + y = 0} \quad 3.$$

$$\frac{\ln^2 y}{2} = \cot x + C \Leftrightarrow y' \cdot (\sin x)^2 \cdot \ln y + y = 0 \quad \text{פתרון א.}$$

$$\frac{\ln^2 y}{2} = \cot x - 1 \Leftrightarrow C = -1 \Leftrightarrow \frac{\ln^2 1}{2} = \cot \frac{\pi}{4} + C \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln^2 y}{2} = \cot x + C \\ y(\pi/4) = 1 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

ג. תשובה : $\ln^2 y = 2 \cot x - 2$

$$y' = \frac{x-y}{2x-2y+5} \quad .4$$

פתרון .א

$$\Leftrightarrow 1-z' = \frac{z}{2z+5} \Leftrightarrow \{z(x) = x-y, z' = 1-y'\} \Leftrightarrow y' = f(x-y) \Leftrightarrow y' = \frac{x-y}{2(x-y)+5}$$

$$2z-5 \ln|z+5| = x+C \Leftrightarrow \left(2 - \frac{5}{z+5}\right) dz = dx \Leftrightarrow \left\{ \frac{2z+5}{z+5} dz = dx, z \neq -5 \right\} \Leftrightarrow z' = \frac{z+5}{2z+5}$$

$$x-2y-5 \ln|x-y+5| = C$$

ב. האם $y = x+5 \Leftrightarrow z = -5$ פתרון ? כן, (בדוק!)
 ג. תשובה : $y = x+5, x-2y-5 \ln|x-y+5| = C$

III. משוואות הומוגניות $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

הצבה $\frac{y}{x} = t(x)$

$$\frac{y}{x} = t(x) \Rightarrow y(x) = x t(x) \Rightarrow y' = t + xt'$$

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow t + xt' = \varphi(t) \Rightarrow xt' = \varphi(t) - t \Rightarrow \frac{dt}{\underbrace{\varphi(t) - t}_{\neq 0}} = \frac{dx}{x}$$

דוגמאות :

1. $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$
 פתרון .א

$$(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0 \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{x^2 + 2xy}{-xy} \Rightarrow y' = -\frac{1 + 2y/x}{y/x} \Rightarrow y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} y/x = t(x) \Rightarrow y = x \cdot t \\ y' = -\frac{1 + 2y/x}{y/x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t + xt' = -\frac{1+2t}{t} \Rightarrow xt' = -\frac{1+2t+t^2}{t} \Rightarrow$$

$$t \neq -1, \frac{t dt}{(1+t)^2} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|1+t| + \frac{1}{1+t} = -\ln|x| + C \Rightarrow \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C$$

ב. האם $x=0$ פתרון ? כן, (בדוק!) ; האם $y=0$ פתרון ? לא, (בדוק!)
 האם $y=-x \Leftrightarrow t=-1$ פתרון ? כן, (בדוק!)

ג. תשובה : $y = -x, x=0, \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C$

משוואה דיפרנציאלית $y' = \varphi\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

1. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$. נשתמש בהצבה $z(x) = a_1x + b_1y$ ונקבל משוואה הניתנת להפרדה.

2. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. למערכת $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ קיים פתרון יחיד $x = x_0, y = y_0$. נשתמש בהצבה

$$\frac{dt}{ds} = \varphi\left(\frac{a_1s + b_1t}{a_2s + b_2t}\right) \text{ ונקבל משוואה הומוגנית } s = x - x_0, \quad t = y - y_0$$

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + y - 1} \quad .2$$

פתרון
א.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad y' = \varphi\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \Leftarrow y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + y - 1}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \frac{dt}{ds} = \frac{(s+1) + 2(t-1) + 1}{2(s+1) + (t-1) - 1} \Leftarrow \begin{cases} ds = dx \\ dt = dy \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} s = x - 1 \\ t = y + 1 \end{cases} \text{ נציב}$$

$$s \neq 0, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1 + 2t/s}{2 + t/s} \text{ משוואה הומוגנית } \frac{dt}{ds} = \frac{s + 2t}{2s + t} \text{ נציב } t/s = u(s)$$

$$\ln|s| = \ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{1}{2}\ln|u^2 - 1| + \frac{\ln|C|}{2} \Leftarrow \begin{cases} \frac{ds}{s} = \frac{2+u}{1-u^2} \\ u \neq 1, u \neq -1 \end{cases} \text{ אזי}$$

$$\Leftarrow (t-s)^3 = C(t+s) \Leftarrow s^2 = \frac{C(u+1)}{(u-1)^3} \Leftarrow s^2 = \frac{C(u+1)^2}{(u-1)^2(u^2-1)} \Leftarrow$$

$$(y-x+2)^3 = C(x+y)$$

ב. האם $x=1 \Leftarrow s=0$ פתרון? לא, (בדוק!)

האם $y=x-2 \Leftarrow t=s \Leftarrow u=1$ פתרון? כן, (בדוק!)

האם $y=-x \Leftarrow t=-s \Leftarrow u=-1$ פתרון? כן, (בדוק!)

ג. תשובה: $y = -x, (y-x+2)^3 = C(x+y)$

תרגילים

פתור את המשוואות הבאות ע"י הפרדת משתנים :

1. $(x + xy^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$

8. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$

2. $xtx' = 1 - t^2$

9. $\cos x \sin y \, dy - \cos y \sin x \, dx = 0, y(\pi) = \pi$

3. $y' = y \sin^2 x, y(0) = e$

10. $yx' + x = x^2$

4. $(xy^2 - x)dx + (x^2y + y)dy = 0$

11. $\ln \cos y \, dx + x \tan y \, dy = 0$

$$5. s' \sqrt{5+t^2} = s$$

$$12. 3e^x \tan y dx + \frac{1+e^x}{\cos^2 y} dy = 0, y(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$6. dr + r \tan \varphi d\varphi = 0, r(\pi) = 2 \quad 13. y' = 2^{x-y}, y(-3) = -5$$

$$7. y' = \cos(x-y)$$

$$14. 2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0, y(0) = 2$$

תשובות :

$$1. \arctan y = C + \ln \sqrt{1+x^2}$$

$$7. x + \cot(0.5(x-y)) = C, y = x - 2\pi k, k \in Z$$

$$2. x^2 + t^2 - 2 \ln |t| = C$$

$$8. \sqrt{4x+2y-1} - 2 \ln(\sqrt{4x+2y-1} + 2) = x + C$$

$$3. y = e^{0.5x-0.25 \sin 2x+1}$$

$$9. y = x, y = 2\pi - x$$

$$4. (1+x^2)(y^2-1) = C$$

$$10. x(1-Cy) = 1, x = 0$$

$$11. \cos y = e^{Cx}, x = 0$$

$$5. s = C \left(t + \sqrt{5+t^2} \right)$$

$$12. (1+e^x)^3 \tan y = 8$$

$$13. 2^x - 2^y = 3/32$$

$$6. r = -2 \cos \varphi$$

$$14. \ln |x+y-1| = 2 - 1.5x - y$$

פתור את המשוואות הבאות :

$$1. (2x-y)dx - (x+y)dy = 0$$

$$2. ts' = s(\ln s - \ln t)$$

$$4. (2x-4y+6)dx + (x+y-3)dy = 0$$

$$3. xy + y^2 - (2x^2 + xy)y' = 0, y(1) = 1$$

$$5. xy' = y \cos(\ln y - \ln x)$$

$$6. (x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2 + y^2)dy = 0, y(1) = 0$$

תשובות :

$$1. y^2 + 2xy - 2x^2 = C$$

$$4. (y-2x)^3 = C(y-x-1)^2, y = x+1$$

$$2. s = t e^{Ct+1}$$

$$5. \cot \frac{\ln(y/x)}{2} = \ln |Cx|, y = x e^{2\pi k}, k \in Z$$

$$3. y^2 = x e^{(x-y)/x}$$

$$6. x^5 + 10x^3y^2 + 5xy^4 = 1$$

תרגול 3

משוואות מסדר ראשון (המשך)

משוואה ליניארית $y' + p(x)y = g(x)$

דוגמה: $xy' + 2y = x^4$

פתרון $\left\{ \begin{array}{l} y' + 2\frac{y}{x} = x^3 \\ x \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow xy' + 2y = x^4$ משוואה ליניארית

דרג 1 שיטה גורם אינטגרציה:

$$p(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow \int p(x)dx = \ln x^2 \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)dx} = x^2$$

$$\left(y' + 2\frac{y}{x}\right)\mu(x) = (x^3)\mu(x) \Rightarrow \left(y' + 2\frac{y}{x}\right)x^2 = (x^3)x^2 \Rightarrow$$

$$yx^2 + 2yx = x^5 \Rightarrow (yx^2)' = x^5 \Rightarrow yx^2 = \frac{x^6}{6} + C \Rightarrow y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$$

דרג 2 שיטת הוריאציה

a) $y' + 2\frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + 2\frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow y = \frac{C}{x^2}$ b) $\begin{cases} y' + 2y/x = x^3 \\ y = M(x)/x^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\frac{M'x^2 - 2xM}{x^4} + \frac{2M}{x^3} = x^3 \Rightarrow \frac{M'}{x^2} = x^3 \Rightarrow \begin{cases} M = x^6/6 + C \\ y = M(x)/x^2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$$

משוואת ברנולי $y' + p(x)y = g(x)y^\alpha$ ($\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$)

דוגמה: $y' + 2y = y^2e^x$

פתרון

דרג 1 א. נשתמש בהצבה $z = y^{1-\alpha}$

$$z' = -\frac{y'}{y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1/y \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \alpha = -1, \alpha = 2 \Leftrightarrow y' + 2y = y^2e^x$$

$$z' - 2z = -e^x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x \\ z' = -y'/y^2 \end{cases}$$

ב. $z' - 2z = -e^x$ משוואה ליניארית $\Leftrightarrow z = Ce^{2x} + e^x$

האם $y = 0$ פתרון? כן, (בדוק!)

דרג 2 שיטת הוריאציה

a) $y' + 2y = 0 \Rightarrow y = Ce^{-2x}$ b) $\begin{cases} y = M(x)e^{-2x} \\ y' + 2y = y^2e^x \end{cases} \Rightarrow M'e^{-2x} - 2Me^{-2x} + 2Me^{-2x} = M^2e^{-3x} \Rightarrow$

$$M' = M^2e^{-x} \Rightarrow \begin{cases} 1/M = C + e^{-x} \\ y = Me^{-2x} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{Ce^{2x} + e^x}$$

תרגילים

I. פתור את המשוואות לינאריות הבאות:

- 1) $y' - y \tan x = \sin x$ 2) $t x' + x = t^3, x(2) = 2.5$ 3) $(x + y^2) dy = y dx$
 4) $y' \cos^2 x - \tan x = -y, y(0) = 0$ 5) $y dx = (x + \ln y) dy$
 6) $y'(1 - x^2) = (1 - x^2) \arcsin x + x(1 - x^2 - y)$

II. פתור את המשוואות ברנולי הבאות :

- 7) $xy^2 y' = x^2 + y^3$ 8) $x dx = (x^2 - 2y + 1) dy$ 9) $y' - y \tan x = y^4 \cos x, y|_{x=\pi} = -1$
 10) $xy' + y - x^3 y^4 = 0$ 11) $y'(x^2 + 1) - 2xy = 4\sqrt{y(x^2 + 1)}$ 12) $y' x^2 \ln y - y = xy'$

תשובות

- 1) $y = \frac{0.5 \sin^2 x + C}{\cos x}$ 2) $x = \frac{t^3}{4} + \frac{1}{t}$ 3) $x = y^2 + C, y, y = 0$ 4) $y = \tan x - 1 + Ce^{-\tan x}$
 5) $x = Cy - 1 - \ln y$ 6) $y = \sqrt{1 - x^2} \left(0.5 \arcsin^2 x - \sqrt{1 - x^2} + C \right)$ 7) $y^3 = Cx^3 - 3x^2$
 8) $x^2 = 2y + Ce^{2y}$ 9) $y^3 \cos^2 x (\cos x - 3 \sin x) = 1$ 10) $xy \sqrt[3]{3 \ln(C/x)} = 1$
 11) $y = (1 + x^2)(\arctan^2 x + C)^2$ 12) $x(1 - Cy + \ln y) = 1$

משוואות מדויקות וגורם האינטגרציה

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

משוואה מדויקת $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. א

$\mu \cdot P(x, y)dx + \mu \cdot Q(x, y)dy = du(x, y)$ μ אבל קיים גורם האינטגרציה : $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$. ב

$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \varphi(x) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx$	$\frac{Q'_x - P'_y}{P} = \varphi(y) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{Q'_x - P'_y}{P} dy$
--	--

א. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ משוואה מדויקת אם $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

ב. אם $\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \varphi(x)$ אזי גורם האינטגרציה μ נחפש ממשוואה $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx$

ג. אם $\frac{Q'_x - P'_y}{P} = \varphi(y)$ אזי גורם האינטגרציה μ נחפש ממשוואה $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{Q'_x - P'_y}{P} dy$

דוגמאות :

1. $(2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$

פתרון $P'_y = Q'_x \Leftrightarrow P'_y = 3x^2, Q'_x = 3x^2, P = 2x + 3x^2 y, Q = x^3 - 3y^2$

לכן $(2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$ היא משוואה מדויקת .

קיימת פונקציה $u(x, y) = C$ כך ש- $u'_x dx + u'_y dy = (2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy$

$$g = -y^3 + C_1, g'(y) = -3y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} u'_y = x^3 + g'(y) \Leftrightarrow u = x^2 + x^3 y + g(y) \Leftrightarrow u'_x = 2x + 3x^2 y \\ u'_y = x^3 - 3y^2 \end{cases}$$

תשובה : $x^2 + x^3 y - y^3 = C$

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0 \quad .2$$

פתרון $P'_y \neq Q'_x \Leftrightarrow P'_y = 2y, Q'_x = 0$ אבל $\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = 2 = \varphi(x)$ לכן $\frac{d\mu}{\mu} = 2dx$ $\mu = e^{2x}$

$$\text{ו- } e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x}ydy = 0 \text{ משוואה מדויקת ...}$$

תרגילים

פתור את המשוואות המדויקות הבאות :

$$1) 2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx = \sqrt{x^2 - y} dy \quad 2) \left(\frac{x}{\sin y} + 2 \right) dx = \frac{(x^2 + 1) \cos y}{1 - \cos 2y} dy$$

$$3) y^2 \cos(xy) dx + (xy \cos(xy) + \sin(xy)) dy = 0$$

מצא גורם אינטגרציה לכל אחת מהמשוואות הבאות ופתור אותן :

$$4) (x^2 + 2x + y)dx - (x - 3x^2 y)dy = 0 \quad 6) (x^3 + 3 \ln y)dx - \frac{x}{y} dy = 0$$

$$5) (2x^2 y + y^3) y' = x \quad 7) x^2 y^2 dx = (1 - x^3 y) dy$$

תשובות :

$$1) 3x^2 + 2\sqrt{(x^2 - y)^3} = C \quad 2) x^2 + 1 = (C - 4x) \sin y \quad 3) y \sin(xy) = C$$

$$4) x^2 + 2x \ln |x| - y + 1.5xy^2 = Cx, x \neq 0 \quad 6) y = e^{x^3(C + \ln|x|)}, x \neq 0$$

$$5) 4x^2 + 2y^2 + 1 = C e^{2y^2} \quad 7) 2x^3 y^3 = C + 3y^2$$

פתור את המשוואות הבאות (מהסדר הראשון):

$$1) \begin{cases} (x+1)(y y' - 1) = y^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$$6) (1 + y^2 \sin 2x) dx = 2y(\cos x)^2 dy$$

$$2) xy' = y + x \tan \frac{y}{x}$$

$$7) y dx + x \ln x dy = xy^3 dy$$

$$3) 2x^2 y y' + y^2 = 2$$

$$8) (e^{-3y} - 2x \cos 2y - 3ye^{-3y}) dy = (2e^{2x} + 1 + \sin 2y) dx$$

$$4) y' = (y + \cos x) \sin x$$

$$9) xy' = y + x \sin^2 \frac{y}{x}$$

$$5) (2x^2 y \ln y - x) y' = y$$

$$10) (x + 4y) y' = 2x + 3y - 5$$

$$11) (x \cos y - y \sin y) dy + (x \sin y + y \cos y) dx = 0$$

$$12) xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$$

$$13) \frac{3x^2 \sqrt{y}(\sqrt{y} - 3) - \sqrt{y}}{x^2(1 + 9x^2)} dx + \frac{1 + 2x \sqrt{y} \arctan 3x}{2x \sqrt{y}} dy = 0$$

תשובות :

$$1) 2x(x+1) = y^2 \quad 2) Cx = \sin \frac{y}{x} \quad 3) y^2 = 2 + C e^{1/x}$$

$$4) y = -\cos x + 1 + C e^{-\cos x} \quad 5) xy(C - \ln^2 y) = 1$$

$$6) x - y^2 \cos^2 x = C \quad 7) 4y \ln x - y^4 = C$$

$$8) e^{2x} + x(1 + \sin 2y) = C + ye^{-3y} \quad 9) \cot \frac{y}{x} + \ln |Cx| = 0$$

$$10) (y - x + 5)^5 (2y + x - 2) = C \quad 11) C e^{-x} = (x - 1) \sin y + y \cos y$$

$$12) \ln |Cx| = \cos \frac{y}{x} \quad 13) \sqrt{y} = x(C - y \arctan 3x)$$