אוניברסיטת בן־גוריון בנגב – המחלקה למתמטיקה – סמסטר א' תשע"ה

חדו"א להנדסת מכונות 1 (201–1–9711) – **פתרון למבחן מועד ב'**

המרצים:
ד"ר דניאל מרקייביץ, ד"ר נעה איידלשטין, ד"ר יוסף שטראוס, ד"ר אהובה שקופ.

תאריך: 25 בפברואר 2015
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות בגודל A4, דו־צדדי (מודפס או בכתב יד). אין להשתמש במחשבון.

מספר הנקודות הכולל במבחן הוא 100. **יש לענות על כל השאלות.** עליכם לענות בפירוט על השאלות במקום המוקצה לתשובה. בכל סעיף עליכם לנמק היטב ולפרט את כל שלבי הפתרון. יינתן ניקוד חלקי במקרים מתאימים.

אין לכתוב בעט אדום.

שימו לב: דפי הטיוטא ישלחו למגרסה.

בהצלחה!

1. חשבו את הגבולות הבאים.

(א) (9 נק')

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}=$$

פתרון: נשים לב שלכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים כי $0<\frac{n}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ לכן

$$0<\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}\le\frac{1}{\frac{n}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

מכיוון ש־ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, נובע ממשפט הסנדוויץ' כי

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}=0.}$$

(ב) (9 נק')

$$\lim_{x\to3^+}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}}=$$

פתרון: נשים לב כי

$$\lim_{x\to3^+}\frac{\ln(\frac{x}{3})}{x-3}=\lim_{x\to3^+}\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to3^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{3}$$

לכן נובע מהרציפות של הפונקציה e^x כי

$$\lim_{x\to3^+}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}}=\lim_{x\to3^+}e^{\frac{\ln(\frac{x}{3})}{x-3}}=e^{\lim_{x\to3^+}\frac{\ln(\frac{x}{3})}{x-3}}=\boxed{e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}}$$

2. (א) (9 נק') חשבו את משוואת הישר המשיק לפונקציה $f(x)=e^{\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}$ בנקודה $x=\pi$.

פתרון: קודם כל, $f(\pi)=e^0=1$. בנוסף, נובע מכלל השרשרת כי

$$f'(x)=e^{\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}\cdot\left(\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\right)'=e^{\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}\cdot\left(\frac{\cos(x)\cos^2(x)-\sin(x)2\cos(x)(-\sin(x))}{\cos^4(x)}\right)$$

לכן $f'(\pi)=\frac{(-1)^3+0}{(-1)^4}=-1$ ואנו מקבלים שמוואת ישר המשיק נתונה ע"י

$$y=f(\pi)+f'(\pi)(x-\pi)\implies\boxed{y=1-(x-\pi)=-x+(1+\pi)}$$

(ב) (9 נק') הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

פתרון: נסמן $f(x)=\ln(x+1)$. נובע ממשפט טיילור עם שארית לגרנג' כי לכל $x>0$ קיים $c\in(0,x)$ המקיים

$$f(x)=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4$$

נשים לב כי

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}\implies f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}\implies f^{(3)}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}\implies f^{(4)}(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}$$

בנוסף,

$$0<\frac{6}{(1+c)^4}<6\implies -6<f^{(4)}(c)<0\implies -\frac{x^4}{4}=-\frac{6x^4}{4!}<\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4<0$$

לכן אנו מקבלים ש־

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<f(x)=\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

(ג) (9 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה: הפונקציה הבאה גזירה בנקודה $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases}x\sin^2(\pi x), & x<1\\ (x-1)\sin^2(\pi x), & x\geq 1\end{cases}$$

פתרון:

נחשב את הנגזרות החד־צדדיות:

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)\sin^2(\pi x)-0}{x-1}=\lim_{x\to1+}\sin^2(\pi x)=\sin^2(\pi)=0$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x\sin^2(\pi x)-0}{x-1}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to1+}\frac{\sin^2(\pi x)+x2\sin(\pi x)\cos(\pi x)\cdot\pi}{1}=0$$

משום ששני הגבולות קיימים ושווים לאפס, אנו מקבלים שהפונקציה f גזירה בנקודה $x=\pi$, ובנוסף $f'(\pi)=0$.

3. (א) (9 נק') חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int_0^1 (x+3)^2(1-x)^{121}\,dx =$$

פתרון: נעשה הצבה $u = 1-x$. אזי $u(0)=1$, $u(1)=0$, $dx=(-1)du$. אנו מקבלים

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+3)^2(1-x)^{121}\,dx &= \int_{u(0)}^{u(1)}((1-u)+3)^2u^{121}\,(-1)du = -\int_1^0 (4-u)^2u^{121}\,du\\ &= \int_0^1 (u^2-8u+16)u^{121}\,du = \int_0^1 (u^{123}-8u^{122}+16u^{121})\,du\\ &= \boxed{\frac{1}{124}-\frac{8}{123}+\frac{16}{122}}\end{aligned}$$

(ניתן לפתור את האינטגרל גם ע"י אינטגרציה בחלקים).

(ב) (10 נק') חשבו את הנפח של גוף הסיבוב המתקבל ע"י סיבוב של התחום הבא סביב הציר ה־ x.

$$0 \le y \le \frac{1}{x\sqrt[4]{x^2+4}}, \qquad x\in[2,\ 2\sqrt{3}]$$

פתרון: נסמן $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[4]{x^2+4}}$. הנפח של הגוף הסיבוב הנדרש נתון ע"י

$$V=\int_2^{2\sqrt{3}} \pi f(x)^2\,dx = \int_2^{2\sqrt{3}} \pi\left(\frac{1}{x\sqrt[4]{x^2+4}}\right)^2 dx = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\pi}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

נעשה הצבה $x=2\tan\theta$ עבור תחום מתאים המקיים $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.. נשים לב ש־ $x=2$ כאשר $\theta=\frac{\pi}{4}$, ובנוסף $x=2\sqrt{3}$ כאשר $\theta=\frac{\pi}{3}$. יתר על כן, בתחום $\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$ מתקיים $\sec\theta=\sqrt{\tan^2\theta+1}$. לכן אנו מקבלים

$$\begin{aligned}V &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\pi}{(2\tan\theta)^2\sqrt{(2\tan\theta)^2+4}}\,2\sec^2\theta\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\pi\sec^2\theta}{4\tan^2\theta\cdot 2\sec\theta}\,d\theta\\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\pi\sec\theta}{4\tan^2\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\,d\theta = \frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta\end{aligned}$$

נעשה הצבה $u=\sin\theta$, $du=\cos\theta d\theta$,

$$\begin{aligned}V &= \frac{\pi}{4}\int_{u(\frac{\pi}{4})}^{u(\frac{\pi}{3})} \frac{1}{u^2}\,du = \frac{\pi}{4}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{u^2}\,du = \frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{u}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{4}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}-(-\frac{2}{\sqrt{2}})\right)\\ &= \boxed{\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}\end{aligned}$$

4. (א) (9 נק') מצאו את **כל** האסימפטוטות האנכיות, האופקיות והמשופעות של הפונקציה $f(x) = 3x + e^{-2x}\sin^2(x)$. במידה ואין אסימפוטוטת מסוג מסויים ציינו זאת.

פתרון: הפונקציות $x, \sin(x), e^x$ רציפות ולכן נובע ממשפט האלגברה של גבולות ש־ f רציפה בתחום הגדרתה $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{לכן, אין לפונקציה } f \text{ אסימפטוטה אנכית.}}$ כאשר $x \to \infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 3 + e^{-2x}\frac{\sin^2(x)}{x}3 + \lim_{x\to\infty} e^{-2x}\frac{\sin^2(x)}{x} = 3$$

מכיוון ש־ $\lim_{x\to\infty} e^{-2x} = 0$ והפונקציה $\frac{\sin^2(x)}{x}$ חסומה כאשר $x \geq 1$, אנו מקבלים שמכפלתם שואפת לאפס. באופן דומה, הפונקציה $\sin^2(x)$ חסומה, ולכן

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x\to\infty} e^{-2x}\sin^2(x) = 0$$

$\boxed{\text{אנו מקבלים שיש לפונקציה } f(x) \text{ אסימפטוטה משופעת } y = 3x \text{ כאשר } x \to \infty.}$

לעומת זאת, כאשר $x \to -\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3 + e^{-2x}\frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} 3 + e^{2t}\frac{\sin^2(-t)}{-t} = \lim_{t\to+\infty} 3 - e^{2t}\frac{\sin^2(t)}{t}$$

והגבול הזה אינו קיים. אכן, על הסדרה $a_n = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} 3 - e^{2a_n}\frac{\sin^2(a_n)}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 3 - e^{2\pi n}\frac{\sin^2(\pi n)}{\pi n} = 3 - 0 = 3$$

אך על הסדרה $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, מכיוון ש־ $n \ll e^n$,

$$\lim_{n\to\infty} 3 - e^{2b_n}\frac{\sin^2(b_n)}{b_n} = \lim_{n\to\infty} 3 - e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} = \lim_{n\to\infty} 3 - \frac{e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} = -\infty$$

$\boxed{\text{לכן אין לפונקציה } f \text{ אסימפטוטה (משופעת או אופקית) כאשר } x \to -\infty.}$

(ב) (9 נק') תהי $g(x) = 2\ln(x^2+1) - 4x\arctan(x) + x^2$. מצאו את התחום של ערכי x כך שבו $g(x)$ קמורה כלפי מעלה.

פתרון: מכיוון ש־ $\ln x, \arctan(x), x$ פונקציות גזירות אינסוף פעמים, נובע מהמשפט לגבי האלגברה של נגזרות וגם כלל השרשרת שהפונקציה f הינה גזירה אינסוף פעמים. לכן על מנת לענות על השאלה אפשר להסתכל בנגזרת השניה של g.

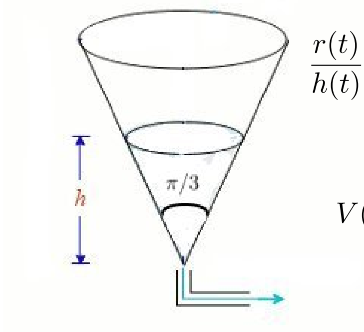
$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x - 4\arctan(x) - \frac{4x}{x^2+1} + 2x = -4\arctan x + 2x \\ g''(x) &= -\frac{4}{x^2+1} + 2 = \frac{2x^2-2}{x^2+1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x^2+1} \end{aligned}$$

לכן $g''(x) \geq 0$ כאשר $x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$, ובנוסף $g''(x) < 0$ כאשר $x \in (-1,1)$.

$\boxed{\text{לכן הפונקציה } g \text{ הינה קמורה כלפי מעלה בתחום } x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty).}$

5. (9 נק') מיכל שצורתו היא חרוט הפוך עם זוית פתיחה של $\pi/3$ מלא ב־ 3π ליטר מים. ברגע מסויים נפתח פתח בתחתית המיכל והמים מתחילים לזרום החוצה בקצב של 2 ליטר לשנייה. מהו קצב ירידת מפלס המים ברגע בו נפתח הפתח?

פתרון: נפח המיים במיכל ברגע t תלוי במפלס המיים $h(t)$ ורדיוס הבסיס $r(t)$ ונתון ע"י $V(t) = \frac{1}{3}\pi r(t)^2 h(t)$. בנוסף, הזווית של החרוט היא $\pi/3$, לכן לכל t מתקיים



$$\frac{r(t)}{h(t)} = \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \implies r(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}h(t)$$

לכן אנו מקבלים

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}h(t)\right)^2 h(t) = \frac{\pi h(t)^3}{9}$$

בנוסף, נובע מכלל השרשרת כי

$$V'(t) = \frac{\pi 3h(t)^2h'(t)}{9} = \frac{\pi h(t)^2 h'(t)}{3} \qquad \implies \qquad h'(t) = \frac{3V'(t)}{\pi h(t)^2}$$

ברגע מסויים t_0 שבו נפתח פתח בתחתית המיכל, נתון ש־ $V(t_0) = 3\pi$ וגם $V'(t_0) = -2$ (שלילי משום שהנפח מתקטן). לכן

$$V(t_0) = 3\pi \implies \frac{\pi h(t_0)^3}{9} = 3\pi \implies h(t_0) = 3$$

אזי *

$$h'(t_0) = \frac{3V'(t_0)}{\pi h(t_0)^2} = \frac{3(-2)}{\pi(3)^2} = \boxed{-\frac{2}{3\pi}}$$

6. (9 נק') תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור 2. הוכיחו שקיימת לפחות נקודה **אחת** $a \in [0,1]$ המקיימת $f(a+1) = f(a)$.

פתרון: תהי $g(x) = f(x+1) - f(x)$. מספיק להוכיח שקיים $a \in [0,1]$ המקיים $g(a) = 0$, משום שבמקרה זה

$$g(a) = 0 \implies f(a+1) = f(a).$$

נשים לב שנובע מהמחזוריות של f כי $f(2) = f(0)$, ואנו מקבלים כי

$$\begin{aligned} g(0) &= f(1) - f(0) \\ g(1) &= f(2) - f(1) = f(0) - f(1) = -g(0) \end{aligned}$$

אזי יש שתי אפשרויות: או $g(0) = 0$ או $g(0) \neq 0$. אם $g(0) = 0$, אזי $a = 0$ מקיים $g(a) = 0$. אם $g(0) \neq 0$, אזי $g(0) \cdot g(1) = -g(0)^2 < 0$. נשים לב שנובע ממשפט האלגברה של פונקציות רציפות כי הפונקציה g רציפה בקטע $[0,1]$, ולכן נובע ממשפט הערך הביינים שקיימת $a \in [0,1]$ המקיימת $g(a) = 0$.

*יחידות התשובה dm/s משום שהיחידות של נתוני השאלה הן ליטר ($\ell = dm^3$) וליטר לשנייה ($\ell/s = dm^3/s$).