אוניברסיטת בן־גוריון בנגב – המחלקה למתמטיקה – סמסטר א' תשע"ה

חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) – **פתרון למבחן מועד א'**

המרצים:

ד"ר דניאל מרקייביץ, ד"ר נעה איידלשטין, ד"ר יוסף שטראוס, ד"ר אהובה שקופ.

תאריך: 2 בפברואר 2015

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: דף נוסחאות בגודל A4, דו־צדדי (מודפס או בכתב יד). אין להשתמש במחשבון.

מספר הנקודות הכולל במבחן הוא 100. ***יש לענות על כל השאלות.*** עליכם לענות בפירוט על השאלות במקום המוקצה לתשובה. בכל סעיף עליכם לנמק היטב ולפרט את כל שלבי הפתרון. יינתן ניקוד חלקי במקרים מתאימים.

אין לכתוב בעט אדום.

שימו לב: דפי הטיוטא ישלחו למגרסה.

בהצלחה!

1. חשבו את הגבולות הבאים.

(א) (9 נק')

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{\cos(\ln(1+\frac{1}{n}))}=$$

פתרון: נובע ממשפט האלגברה של גבולות וגם מהרציפות של הפונקציות $\sqrt{x}$, $\ln(x)$, $\cos(x)$ כי

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{\cos(\ln(1+\frac{1}{n}))}\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos(\ln(1+\frac{1}{n}))}\cdot\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}\\
&= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\cos(\ln(1+\frac{1}{n}))}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\cos(\ln(1))}\cdot\frac{1}{2}=1\cdot\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(ב) (9 נק')

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=$$

פתרון: מדובר בסכום רימן של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ביחס לחלוקה של הקטע $[0,1]$ ל־ n חלקים שווים, כלומר $\{0=x_0<x_1<\dots x_n=1\}$ כאשר $x_k=\frac{k}{n}$, $k=0,1,\dots n$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x_k=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx\\
&= \arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}-0=\boxed{\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

2. (א) (9 נק') חשבו את משוואת הישר המשיק לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{\frac{5-x}{x^2+3}}$ בנקודה $x=-2$.

פתרון: המשוואה של הישר המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=-2$ נתונה ע"י $y = f(-2) + f'(-2)(x+2)$. מההצבה אנו מקבלים ש־ $f(-2) = 1$. בנוסף,

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{5-x}{x^2+3}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{5-x}{x^2+3}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{5-x}{x^2+3}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{x^2-10x-3}{(x^2+3)^2}$$

אזי $f'(2) = \frac{1}{7}$ ולכן אנו מקבלים $\boxed{y = 1 + \frac{1}{7}(x+2) = \frac{x}{7} + \frac{9}{7}}$

(ב) (9 נק') מצאו את כל נקודות האי־רציפות של הפונקציה הבאה ומיינו אותן.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) + e^{\frac{1}{x-2}}, & x \neq 1,2 \\ 1, & x = 1,2 \end{cases}$$

פתרון: הפונקציות $\arctan(x), e^x, x^2$ רציפות לכל $x \in \mathbb{R}$, והפונקציות $\frac{1}{x-1}, \frac{1}{x-2}$ רציפות לכל $x \neq 1,2$. לכן אנו מקבלים ש־ f רציפה בכל $x \neq 1,2$, כי היא הרכבה וחיבור של פונקציות רציפות בתחום זה. בנוסף, $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$, $\lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = +\infty$, לכן

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \arctan\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) + e^{\frac{1}{x-2}} = \frac{\pi}{2} + e^{-1} \neq 1 = f(1) \\
\lim_{x\to 2-} f(x) &= \lim_{x\to 2-} \arctan\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) + e^{\frac{1}{x-2}} = \arctan(1) + 0 = \frac{\pi}{4} \\
\lim_{x\to 2+} f(x) &= \lim_{x\to 2+} \arctan\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) + e^{\frac{1}{x-2}} = \infty
\end{aligned}$$

אזי $x=1$ היא נקודת אי־רציפות סליקה, ו־ $x=2$ היא נקודת אי־רציפות עיקרית/מסוג שני.

(ג) (9 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה: הפונקציה $f(x) = |\sin(x^2)|$ גזירה בנקודה $x = \sqrt{\pi}$.

פתרון: נשים לב כי

$$f(x) = |\sin(x^2)| = \begin{cases} \sin(x^2), & \sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < \sqrt{\pi} \\ 0, & x = \sqrt{\pi} \\ -\sin(x^2), & \sqrt{\pi} < x < \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \end{cases}$$

אזי

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\sqrt{\pi}-} \frac{f(x) - f(\sqrt{\pi})}{x - \sqrt{\pi}} &= \lim_{x\to\sqrt{\pi}-} \frac{\sin(x^2) - 0}{x - \sqrt{\pi}} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to\sqrt{\pi}-} \frac{\cos(x^2)2x}{1} = -2\sqrt{\pi} \\
\lim_{x\to\sqrt{\pi}+} \frac{f(x) - f(\sqrt{\pi})}{x - \sqrt{\pi}} &= \lim_{x\to\sqrt{\pi}+} \frac{-\sin(x^2) - 0}{x - \sqrt{\pi}} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to\sqrt{\pi}+} \frac{-\cos(x^2)2x}{1} = 2\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

אנו מקבלים שהגבולות החד־צדדיים שונים, ולכן f אינה גזירה בנקודה $x = \sqrt{\pi}$.

3. חשבו את האינטגרלים הבאים.

(א) (9 נק')

$$\int_0^\pi x^2 \sin(x)\, dx =$$

פתרון: נשתמש באיטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2 \sin(x)\, dx &= \left[-x^2\cos(x)\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi 2x(-\cos x)\, dx \\ &= \left[-x^2\cos(x)\right]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi 2x\cos(x)\, dx \\ &= \left[-x^2\cos(x) + 2x\sin(x)\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi 2\sin(x)\, dx \\ &= \left[-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x)\right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= (-\pi^2\cos(\pi) + 0 + 2) - (0 + 0 + 2) = \boxed{\pi^2 - 4}\end{aligned}$$

(ב) (10 נק')

$$\int \frac{12x^3 + 11x^2 + 8x + 12}{x^4 + 4x^2}\, dx =$$

פתרון: קודם כל יש לחשב את הפירוק לשברים חלקיים, כלומר יש למצוא המקיימים $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

$$\frac{12x^3 + 11x^2 + 8x + 12}{x^4 + 4x^2} = \frac{12x^3 + 11x^2 + 8x + 12}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

אחרי הכפלת שני הצדדים במכנה המשותף $x^2(x^2+4)$, אנו מקבלים

$$12x^3 + 11x^2 + 8x + 12 = Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)x^2 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 4Ax + 4B$$

לכן יש לפתור את המשוואות

$$A + C = 12, \qquad B + D = 11, \qquad 4A = 8, \qquad 4B = 12$$

אזי $A = 2, B = 3, C = 10, D = 8$. כלומר, נשאר לנו לחשב

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{10x + 8}{x^2 + 4}\right) dx &= 2\ln|x| - \frac{3}{x} + 5\int \frac{2x}{x^2+4}\, dx + 8\int \frac{1}{x^2+4}\, dx \\ &= \boxed{2\ln|x| - \frac{3}{x} + 5\ln(x^2+4) + 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C}\end{aligned}$$

4. תהי $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

(א) (9 נק') חשבו את כל האסימפטוטות של f.

פתרון: הפונקציה $\ln(x)$ מוגדרת כאשר $x > 0$ בלבד, ולכן תחום ההגדרה של f הוא הקטע $(0, \infty)$. יתר על כן, $\ln(x)$, x רציפות בקטע $(0, \infty)$ והפונקציה x אינה מתאפסת בו, לכן נובע ממשפט האלגברה של הפונקציות הרציפות כי f רציפה.
אזי יש לברר האם יש ל־f אסימפטוטות כאשר $x \to \infty$ ו־ $x \to 0+$ בלבד.
נשים לב כי $\lim_{x\to0+} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x\to0+} \frac{1}{x^2} = \infty$ לכן

$$\lim_{x\to0+} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$$

$$\boxed{\text{לכן יש לפונקציה } f \text{ אסימפטוטה אנכית } x = 0 \text{ כאשר } x \to 0+.}$$

בנוסף, נובע מכלל לופיטל (מקרה "$\frac{\infty}{\infty}$") כי

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\boxed{\text{לכן יש לפונקציה } f \text{ אסימפטוטה אופקית } y = 0 \text{ כאשר } x \to \infty.}$$

(ב) (9 נק') האם יש לפונקציה f נקודות מקסימום ומינימום גלובאלי? אם כן, מצאו אותם ואם לא, נמקו.

פתרון: נשים לב כי f גזירה ובנוסף

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

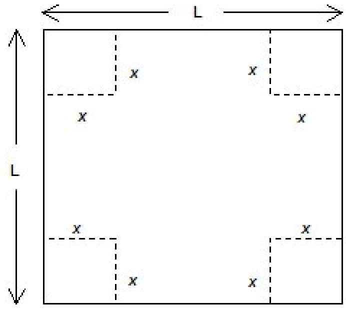
יתר על כן המכנה חיובי כאשר $x > 0$. לכן סימן המונה קובע את הסימן של המנה. הפונקציה $g(x) = 1 - 2\ln(x)$ יורדת ממש משום ש־ $g'(x) = -\frac{2}{x} < 0$ לכל $x > 0$. יתר על כן

$$1 - 2\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = \sqrt{e}$$

לכן אנו מקבלים ש־ $f'(x) > 0$ כאשר $x < \sqrt{e}$, ו־ $f'(x) < 0$ כאשר $x > \sqrt{e}$. כלומר, f עולה ממש בקטע $(0, \sqrt{e})$ ויורדת ממש בקטע $(\sqrt{e}, \infty)$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{לכן } f \text{ מקבלת מקסימום גלובאלי בנקודה } x = \sqrt{e}. \text{ בנוסף, מכיוון ש־}\\ \lim_{x\to0+} f(x) = -\infty, \text{ אין לפונקציה } f \text{ מינימום גלובאלי.}\end{array}}$$

5. (9 נק') קופסת מתכת ללא מכסה נבנית מלוח מתכת ריבועי בעל אורך צלע L על־ידי חיתוך רבועי מתכת בעלי אורך צלע x מארבע הפינות של לוח המתכת וקיפול הדפנות המתקבלות בדרך זו. מהו הנפח המקסימלי האפשרי של קופסאות המתכת המתקבלות בדרך זו.



פתרון: נפח הקופסה נתון ע"י הפונקציה

$$f(x) = x(L-2x)^2,$$

כאשר $x \in [0, \frac{L}{2}]$. הפונקציה f רציפה בקטע סגור וחסום $[0, \frac{L}{2}]$ ולכן נובע ממשפט ויירשטראס שישנה נקודות מקסימום מוחלט בקטע זה. נשים לב כי הפונקציה חיובית כאשר $0 < x < \frac{L}{2}$ ובנוסף $f(0) = f(\frac{L}{2}) = 0$. לכן נקודת המקסימום המוחלט נמצאת בקטע $(0, \frac{L}{2})$, והפונקציה גזירה בו, לכן נובע ממשפט פרמה שבנקודה הזו הנגזרת מתאפסת.

$$f'(x) = (L-2x)^2 + x2(L-2x)\cdot(-2) = 4x^2 - 4Lx + L^2 - 4Lx + 8x^2 = 12x^2 - 8LX + L^2$$

$$f'(x) = 0 \iff 12x^2 - 8LX + L^2 = 0 \iff x = \frac{L}{2}, \frac{L}{6}$$

לכן אנו מקבלים הנפח המקסימלי כאשר

$$\boxed{x = \frac{L}{6} \implies f(\frac{L}{6}) = \frac{2L^3}{27}}$$

6. (9 נק') תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $f(n) = (-\pi)^n$ כאשר $n \in \mathbb{Z}$. הוכיחו כי f' אינה חסומה.

פתרון: נובע ממשפט הערך הממוצע של לגרנג' שלכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ קיים $c_n \in (0, 2n)$ המקיים

$$f'(c_n) = \frac{f(2n) - f(0)}{2n - 0} = \frac{(-\pi)^{2n} - 1}{2n} = \frac{\pi^{2n} - 1}{2n}$$

נשים לב שנובע למשל ממשפט לופיטל (מקרה " $\frac{\infty}{\infty}$ ") כי

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi^{2x} - 1}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(\pi)\pi^{2x}}{2} = \infty$$

אזי אנו מקבלים כי

$$\lim_{n\to\infty} f'(c_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{2n} - 1}{2n} = \infty.$$

לכן f' אינה חסומה.