שיעור 12

1. גזירת אינטגרל(המשפט היסודי השני של חדו"א)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה תחום $[a,b]$ כך שלכל x נקודה בתחום $[a,b]$

מתקיים $\int_a^x f(t)dt = F(x)$. אזי $f(x) = F'(x)$ כלומר $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

הכללת המשפט

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f(b(x))\cdot b'(x) - f(a(x))\cdot a'(x)$$

תרגילים

1. גזור את הפונקציות הבאות

$$1.I(x) = \int_2^x e^{-x^2}dt \quad , \quad 2.I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2}dt \quad , \quad 3.I(x) = \int_2^{x^3+x} t\ln t dt \, , \quad 4.I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

2. חשב את הגבולות הבאים

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x}, \quad 2.\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt \, , \quad 3.\lim_{x\to\pi}\frac{\int_0^x \cos^2 tdt}{x-\pi}$$

3. מצא נקודות קיצון של הפונקציות בתחום $x\in[0,\infty)$

$$1.F(x) = \int_0^{x^3}\arctan tdt \quad , \quad 2.F(x) = \int_0^x (t+1)(t-1)^2 dt$$

4. הוכח כי לפונקציה $f(x) = \int_5^{x^2} ln(t+1)dt$ אין נקודות פיתול ב- $x\in[0,\infty)$

5. הוכח כי פונקציה $f(x) = -\int_0^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}dt$ קמורה ב $x\in(0,\infty)$

6. חשב את $\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{x^2}\ln(x^2)dt}{x^2-1}$

תשובות

1 : $1.I'(x) = e^{-x^2}$ $\quad 2.I'(x) = \frac{3\ln x^3}{x^4}$ $\quad 3.I'(x) = (x^3+x)\ln(x^3+x)(3x^2+1)$

$4.I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

2 (1) $\frac{1}{2}$: , (2) $\frac{2}{3}$, (3) ∞

3: סעיף 1- $x=0$ נקודת מינימום. סעיף 2- $x=1$ נקודת מינימום

2. אינטגרל לא אמיתי

הגדרה

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בתחום $[a,\infty)$ ולכן אינטגרבילית בכל תחום $[a,b]$

כאשר $a<b$. אם קיים גבול סופי $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ אז הגבול הזה נקרא

אינטגרל לא אמיתי. מסמנים $\int\limits_a^\infty f(x)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$

ואומרים כי האינטגרל $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ מתכנס. אחרת (גבול לא קיים או שווה לאינסוף)

אומרים כי האינטגרל $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ מתבדר

דוגמאות

1)

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(\arctan x\Big|_1^b\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\arctan x\Big|_1^b\right)=$$

$$\lim_{b\to\infty}(\arctan b-\arctan 1)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

2)

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=-\frac{1}{1-\alpha}$$

מתכנס כאשר $\alpha>1$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\left(\ln x\Big|_1^b\right)=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=\infty$$

מתבדר כאשר $\alpha<1$

לסיכום $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס כאשר $\alpha>1$ ומתבדר כאשר $\alpha\le 1$

משפט

יהי a ערך קבוע ותהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בכל תחום $[a,b]$ כאשר $a<b$

א) אם קיימים ערכים $M>0$ ו-$\alpha>1$ כך ש- $0\le f(x)\le \frac{M}{x^{\alpha}}$ לכל $a<x$

אז האינטגרל $\int_a^{\infty} f(x)dx$ מתכנס

ב) אם קיימים ערכים $M>0$ ו-$\alpha\le 1$ כך ש-$\frac{M}{x^{\alpha}}\le f(x)$ לכל $a<x$

אז האינטגרל $\int_a^{\infty} f(x)dx$ מתבדר

הגדרה

א) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בתחום $[a,b)$ ו- $\lim_{x\to b-} f(x)=\pm\infty$

אם קיים גבול סופי $\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ אז הגבול הזה נקרא

אינטגרל לא אמיתי. מסמנים $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

ואומרים כי האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס. אחרת (גבול לא קיים או שווה לאינסוף)

אומרים כי האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתבדר

ב) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בתחום $(a,b]$ ו- $\lim_{x\to a+} f(x)=\pm\infty$

אם קיים גבול סופי $\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ אז הגבול הזה נקרא

אינטגרל לא אמיתי. מסמנים $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$

ואומרים כי האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס. אחרת (גבול לא קיים או שווה לאינסוף)

אומרים כי האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתבדר

דוגמא 3)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a\to 0+}\left(\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_a^1\right) = \lim_{a\to 0+}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}$$

מתכנס כאשר $\alpha < 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0+}\left(\ln x\Big|_a^1\right) = \lim_{a\to 0+}(\ln 1 - \ln a) = \infty$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a\to 0+}\left(\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_a^1\right) = \lim_{a\to 0+}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \infty$$

מתבדר כאשר $\alpha > 1$

לסיכום $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס כאשר $\alpha < 1$ ומתבדר כאשר $\alpha \ge 1$

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום $[a,b)$ ואינטגרבילית בתחום $[a,b-\varepsilon]$ לכל $\varepsilon > 0$

א) אם קיימים ערכים $M > 0$ ו-$\alpha < 1$ כך ש- $0 \le f(x) \le \frac{M}{(b-x)^\alpha}$

לכל x בתחום $[a,b)$ אז האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס

ב) אם קיימים ערכים $M > 0$ ו-$\alpha \ge 1$ כך ש- $\frac{M}{(b-x)^\alpha} \le f(x)$ לכל $a < x$

אז האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ מתבדר

משפט

תהי $f(x)$ *פונקציה המוגדרת בתחום* $(a,b]$ *ואינטגרבילית בתחום* $[a+\varepsilon,b]$ *לכל* $\varepsilon>0$

א) אם קיימים ערכים $M>0$ *ו-*$\alpha<1$ *כך ש-* $0\le f(x)\le \dfrac{M}{(x-a)^{\alpha}}$

לכל x *בתחום* $(a,b]$ *אז האינטגרל* $\int_a^b f(x)dx$ *מתכנס*

ב) אם קיימים ערכים $M>0$ *ו-*$\alpha\ge 1$ *כך ש-*$f(x)\ge \dfrac{M}{(x-a)^{\alpha}}$ *לכל* $a<x$

אז האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ *מתבדר*