

שיעור 11

שיטות למציאת אינטגרלים לא מסוימים

1. שיטת ההצבה (החלפת משתנה האינטגרציה)

נגזרת של פונקציה מורכבת

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \Rightarrow \frac{dF(u(x))}{dx} = \frac{dF(u)}{du} \frac{du(x)}{dx} = f(u(x)) \cdot u'(x)$$

התהליך ההפוך

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow$$

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u) du = F(u(x)) + C$$

דוגמאות

(1)

$$\int \cos(x^2) x dx = \frac{1}{2} \int \cos(x^2) \cdot (2x dx) = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{array} \right]$$

$$\frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{\sin u}{2} + C = \frac{\sin(x^2)}{2} + C$$

(2)

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \left[\begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{array} \right]$$

$$-\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

(3)

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{x} \\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{array} \right]$$

$$2 \int e^u du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

2. שיטת החלקים

נגזרת של מכפלה של 2 פונקציות

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

או

$$\frac{d[u(x) \cdot v(x)]}{dx} = \frac{du(x)}{dx} \cdot v(x) + u(x) \cdot \frac{dv(x)}{dx}$$

דיפרנציאל של מכפלה של 2 פונקציות

$$d[u(x) \cdot v(x)] = du(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot dv(x)$$

אינטגרל של מכפלה של 2 פונקציות

$$u(x) \cdot v(x) = \int v(x) du(x) + \int u(x) dv(x)$$

נוסחאות לשיטת האינטגרציה בחלקים

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

דוגמאות

(1) אינטגרלים מסוג $\int x^m e^{ax} dx$, $\int x^m \sin ax dx$, $\int x^m \cos ax dx$ **או** $\int x^m e^{ax} dx$ $\Leftarrow v'(x) = x^m$ **לדוגמא**

$$\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

(2) אינטגרלים מסוג $\int x^m \ln \dots dx$ **או** $\int x^m \arctan \dots dx$ **לדוגמא**

$$\int x \arctan x dx = \frac{1}{2} \int \arctan x dx^2 = \frac{1}{2} \left(x^2 \arctan x - \int x^2 d \arctan x \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \right) = \frac{1}{2} \left(x^2 \arctan x - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(x^2 \arctan x - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \frac{1}{2} (x^2 \arctan x - x + \arctan x) + C$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

(3) אינטגרלים מסוג $\int e^{ax} \cos bxdx$ ו- $\int e^{ax} \sin bxdx$ - "בומרנג" לדוגמא

$$\int e^x \cos x dx = \int e^x d \sin x = e^x \sin x - \int \sin x de^x =$$

$$e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x + \int e^x d \cos x =$$

$$e^x \sin x + e^x \cos x - \int \cos x de^x = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

נשים לב

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

לכן

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

ולכן

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$$

3. שברים רציונאליים - פירוק לשברים בסיסיים עם מקדמים לא מוגדרים

$$\frac{A}{x - \alpha}, \frac{B}{(x - \alpha)^2}, \frac{C}{(x - \alpha)^3}, \dots, \frac{Ax + B}{x^2 + Bx + C}$$

(עקרונית ייתכן $\dots, \frac{Ax + B}{(x^2 + Bx + C)^2}, \frac{Ax + B}{(x^2 + Bx + C)^3}, \dots$ אך בקורס לא נעסוק בהם)

דוגמאות

(1)

$$\int \frac{dx}{x^2 + 3x - 4} = \frac{1}{5} \left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+4} \right) = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-1}{x+4} \right| + C$$

(2)

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 3x - 4} dx = \dots \text{ חילוק ארוך תחילה}$$

(3)

$$\int \frac{dx}{x^3 - x} = \int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \right) dx = \dots$$

(4)

$$\int \frac{dx}{x^3 + x} = \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \right) dx = \dots$$

(5)

$$\int \frac{10x-3}{x^2+4x+13} dx = \int \frac{10x-3}{(x+2)^2+3^2} dx = \int \frac{10(x+2)-23}{(x+2)^2+3^2} dx = \dots$$

פרק לשברים בסיסיים (6)

$$\frac{12x^4}{x^3(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

$$\frac{12x^4}{(x-2)(x+1)^2(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2-2x+2}$$

תרגילים נוספים - ה. אנטון פרק 9 סעיף 9.6 תרגילים 1-40

4. אינטגרלים של פונקציות טריגונומטריות

• אינטגרלים מסוג $\int \sin ax \cos bxdx$ $\int \sin ax \sin bxdx$ $\int \cos ax \cos bxdx$ **או** $\int \sin ax \cos bxdx$ $\int \sin ax \sin bxdx$ $\int \cos ax \cos bxdx$

שימוש בזהויות

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\int \sin 2x \cos 5xdx = \dots$$

דוגמא

• אינטגרלים מסוג $\int \sin^m x \cos^n x dx$ כאשר לפחות אחת החזקות אי זוגית

הצבה $u = \cos x$ או $u = \sin x$

דוגמאות

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx \Rightarrow u = \cos x$$

$$\int \cos^5 x dx \Rightarrow u = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} \Rightarrow u = \sin x$$

• אינטגרלים מסוג $\int \sin^m x \cos^n x dx$ כאשר שתי החזקות זוגיות

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

דוגמאות

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx = \dots$$

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x (\sin x \cos x)^2 dx = \dots$$

• אינטגרלים מסוג $\int \tan^m x dx$ או $\int \cot^m x dx$ עם חזקה זוגית

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \quad \text{שימוש בזהויות}$$

דוגמא

$$\int \tan^4 x dx = \int \tan^2 x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan^2 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$\int \tan^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \tan^2 x dx = \int t^2 dt - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c$$

• אינטגרלים מסוג $\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} dx$ (לא לבחינה*)

$$\tan \frac{x}{2} = t \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \text{הצבה}$$

דוגמא

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{2dt}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C =$$

$$\ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

5. הצבות טריגונומטריות ל"חיסול" שורשים

$$\int \dots \sqrt{a^2 - x^2} \dots dx \Rightarrow x = a \sin t \quad dx = a \cos t dt \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t \quad \bullet$$

דוגמה

$$\int \sqrt{25 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = 5 \sin t \\ dx = 5 \cos t dt \\ \sqrt{25 - x^2} = 5 \cos t \end{array} \right] = \int 25 \cos^2 t dt = \dots$$

$$\int \dots \sqrt{x^2 - a^2} \dots dx \Rightarrow x = \frac{a}{\cos t} \quad dx = -\frac{a \sin t dt}{\cos^2 t} \quad \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a \sin t}{\cos t} \quad \bullet$$

דוגמה

$$\int \sqrt{x^2 - 16} dx = \left[\begin{array}{l} x = \frac{4}{\cos t} \\ dx = -\frac{4 \sin t dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{x^2 - 16} = \frac{4 \sin t}{\cos t} \end{array} \right] = -\int 16 \frac{\sin t dt}{\cos^3 t} = \dots$$

$$\int \dots \sqrt{a^2 + x^2} \dots dx \Rightarrow x = a \tan t \quad dx = \frac{a dt}{\cos^2 t} \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t} \quad \bullet$$

דוגמה

$$\int \sqrt{9 + x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = 3 \tan t \\ dx = \frac{3 dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{9 + x^2} = \frac{3}{\cos t} \end{array} \right] = \int \frac{9 dt}{\cos^3 t} = \dots$$