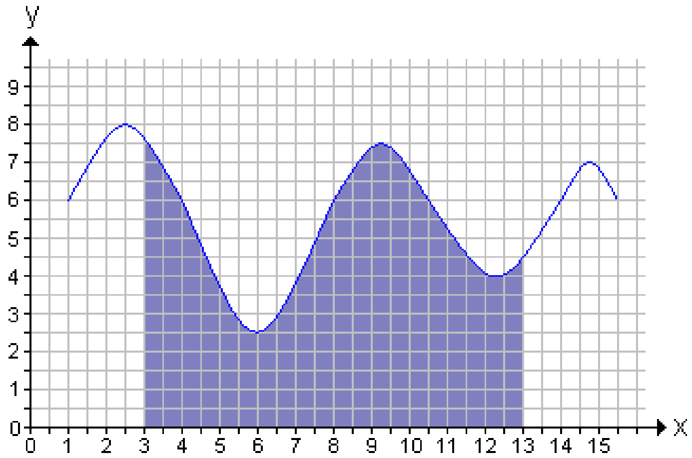
שיעור 10

1. הגדרה של אינטגרל מסוים באמצעות סכומי רימן ($f(x)\ge 0$)



x_k^* - נקודה שרירותית בקטע ה-k

$$\text{שטח}=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right)\Delta x$$

הגדרה

במידה וקיים הגבול הנ"ל אומרים כי פונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע ורושמים

$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$ כאשר ל- $\int_a^b f(x)dx$ קוראים אינטגרל מסוים של פונקציה בתחום מ- a ל- b

משפט ניוטון לייבניץ (המשפט היסודי הראשון של חדו"א)

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אז $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ כאשר

$F(x)$ היא פונקציה קדומה של $\int_a^b f(x)dx$ המקיימת $F'(x)=f(x)$

נהוג לסמן $\int f(x)dx=F(x)+C$ כאשר $\int f(x)dx$ נקרא אינטגרל לא מסוים של פונקציה $y=f(x)$

לדוגמא $\int x^5dx=\frac{x^6}{6}+C$ מפני ש- $\left(\frac{x^6}{6}+C\right)'=x^5$

הסבר

נניח קיים גבול $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$ שאינו תלוי בבחירת נקודות x_k^*

אזי נבחר בהן כך ש- $f(x_k^*) = F'(x_k^*) = \dfrac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{\Delta x}$

(הבחירה אפשרית עפ"י משפט לגרנז'). אזי

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{\Delta x}\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left(F(x_{k+1})-F(x_k)\right) =$$

$$F(x_2)-F(x_1)+F(x_3)-F(x_2)+\ldots+F(x_{n+1})-F(x_n)$$

$$F(x_{n+1})-F(x_1) = F(b)-F(a)$$

לוח אינטגרלים מיידים *(לוח הגזירה ה"הפוך")*

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x+a} = \ln|x|+C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)|+C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad \left(\sec x = \frac{1}{\cos x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \sec x dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

דוגמאות

1) חשב את האינטגרל $\int_0^2 xdx$ תוך שימוש בסכומי רימן וסכום של סדרה חשבונית

$S_n=(a_1+a_n)\frac{n}{2}$ ובדוק את התשובה על ידי נוסחת ניוטון- לייבניץ

פתרון 1 (עפ"י קצוות שמאליים של הקטעים)

$$\int_0^2 xdx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}x_k\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{n}k\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}(0+n-1)\frac{n}{2}=2$$

פתרון 2 (עפ"י קצוות ימניים של הקטעים)

$$\int_0^2 xdx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}x_k\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}k\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}(1+n+1)\frac{n}{2}=2$$

$$\int_0^2 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}=2$$

2) חשב את האינטגרל $\int_3^{10} 4xdx$ תוך שימוש בסכומי רימן וסכום של סדרה

חשבונית $S_n=(a_1+a_n)\frac{n}{2}$ ובדוק את התשובה על ידי נוסחת ניוטון- לייבניץ

פתרון 1 (עפ"י קצוות שמאליים של הקטעים)

$$\int_3^{10} 4xdx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}4x_k\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}4\left(3+\frac{10-3}{n}k\right)\frac{10-3}{n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}4\left(3+\frac{7k}{n}\right)\frac{7}{n}=\lim_{n\to\infty}4\left(3+3+\frac{7(n-1)}{n}\right)\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{7}{n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}14\left(13-\frac{7}{n}\right)=182$$

פתרון 2 (עפ"י קצוות ימניים של הקטעים)

$$\int_3^{10} 4xdx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}4x_k\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}4\left(3+\frac{10-3}{n}k\right)\frac{10-3}{n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}4\left(3+\frac{7}{n}+10\right)\frac{7}{n}=\lim_{n\to\infty}4\left(13+\frac{7}{n}\right)\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{7}{n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}14\left(13+\frac{7}{n}\right)=182$$

על ידי נוסחת ניוטון-לייבניץ $\int_3^{10} 4xdx=\left.2x^2\right|_3^{10}=200-18=182$

3) הוכח באינדוקציה כי $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ וחשב את האינטגרל $\int_0^3 x^2 dx$

תוך שימוש בסכומי רימן ובדוק את התשובה על ידי נוסחת ניוטון- לייבניץ

פתרון 1 (עפ"י קצוות שמאליים של הקטעים)

$$\int_0^3 x^2 dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{27}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{27}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = 9$$

פתרון 2 (עפ"י קצוות ימניים של הקטעים)

$$\int_0^3 x^2 dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{27}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{27}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 9$$

על ידי נוסחת ניוטון-לייבניץ $\int_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{27}{3} - 0 = 9$

2. משפטי אינטגרל מסוים עבור פונקציות אינטגרביליות

1) אם $f(x) \le 0$ עבור $a \le x \le b$ אז

שטח $= -\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = -\int_a^b f(x)dx$

2) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

3) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

4) $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ כאשר $a \le x \le b$

5) אם פונקציה $f(x)$ חסומה בקטע $a \le x \le b$ ורציפה פרט אולי למספר סופי של נקודות אי רציפות אז $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $a \le x \le b$

6) מסקנה ממשפט 5 ומשפטי רציפות - אם פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $a \le x \le b$ אז $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $a \le x \le b$

3. יישומי אינטגרל מסוים

1) שטח התחום החסום בין קווי הפונקציות $y = g(x)$ ו- $y = f(x) \ge g(x)$ בקטע $[a,b]$

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

דוגמא 4

חשב את שטח התחום החסום בין $y = x$ ל- $y = x^2$ ברביע הראשון

פתרון
$$V = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2) נפח גוף סיבוב סביב ציר ה-X (שיטת הדיסקות הניצבות לציר ה- X)

- הנוצר על ידי קו הפונקציה $y = f(x) \ge 0$ סביב ציר ה-X בקטע $[a,b]$

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(x_k^*)\Delta x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

דוגמא 5

חשב את נפח גוף סיבוב של קו הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ סביב ציר ה-X בקטע $[0,1]$

פתרון
$$V = \pi \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \pi \arctan x\Big|_0^1 = \pi(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi^2}{4}$$

- הנוצר על ידי תחום החסום בין קווי הפונקציות $y = g(x) \ge 0$ ו- $y = f(x) \ge g(x)$ סביב ציר ה-X בקטע $[a,b]$

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx$$

דוגמא 6

חשב את נפח הגוף הנוצר על ידי סיבוב התחום החסום בין $y = x$ ל- $y = x^2$ ברביע הראשון סביב ציר ה-X

פתרון
$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}$$

3) נפח גוף סיבוב סביב ציר ה-Y (שיטת הקליפות הגליליות)

- הנוצר על ידי סיבוב התחום מתחת לקו הפונקציה $y=f(x)\ge 0$ סביב ציר ה-Y בקטע $[a,b]$

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}2\pi x_k^*\Delta x f\left(x_k^*\right)=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

דוגמא 7

חשב את נפח גוף סיבוב של קו הפונקציה $y=x^2$ סביב ציר ה-Y בקטע $[0,1]$

פתרון
$$V=2\pi\int_0^1 x^3dx=2\pi\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

- הנוצר על ידי תחום החסום בין קווי הפונקציות $y=g(x)\ge 0$ ו- $y=f(x)\ge g(x)$ סביב ציר ה-Y בקטע $[a,b]$

$$V=\pi\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

דוגמא 8

חשב את נפח הגוף הנוצר על ידי סיבוב התחום החסום בין $y=x$ ל- $y=x^2$ ברביע הראשון סביב ציר ה-Y

פתרון
$$V=2\pi\int_0^1 x\left(x-x^2\right)dx=2\pi\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1=2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{6}$$

4) אורך קו הפונקציה $y=f(x)$ בין נקודות בהן $x=a$ ו- $x=b$

$$L=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\Delta x_k{}^2+\Delta y_k{}^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

דוגמא 9

חשב את אורך קו הפונקציה $y=x^{3/2}$ מ- $x=0$ עד $x=5$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$S=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left.\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right|_0^5=\frac{8}{27}\left[\left(\frac{49}{4}\right)^{3/2}-1\right]=$$

$$=\frac{8}{27}\left[\frac{343}{8}-1\right]=\frac{335}{27}$$