אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה - סמסטר א׳ תשע״ד

# חדו״א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) - מבחן מסכם, מועד ב׳

המרצים:
ד״ר נעה איידלשטין, ד״ר תם מאירוביץ , ד״ר דניאל מרקייביץ׳, ד״ר רועי קרקובסקי,
ד״ר אהובה שקוף.

**תאריך:** 19 בפברואר 2013
**משך הבחינה:** 3 שעות
**חומר עזר:** דף נוסחאות בגודל A4, דו־צדדי (מודפס או בכתב יד). אין להשתמש במחשבון.

**יש לענות על כל השאלות.** מספר הנקודות הכולל במבחן הוא 100. עליכם לענות בפירוט על השאלות במקום המוקצה לתשובה. יש להסביר בעברית בצורה תמציתית וברורה מה אתם עושים ומדוע. יינתן ניקוד חלקי במקרים מתאימים.

**אין להשתמש בעט אדום במבחן.**

**שימו לב:** דפי הטיוטא ישלחו למגרסה.

בהצלחה!

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) (7 נק׳) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan(x)$ **פתרון:**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\sin(x)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos(x)}$$

על פי כלל לופיטל ״ $\frac{0}{0}$ ״:

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{-1}{-\sin(x)}=1$$

(ב) (7 נק') $\lim_{n\to\infty} a_n$ כאשר הסידרה $a_n$ מוגדרת על ידי $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right)$, $a_1 = 4$.
(מותר להניח ללא הוכחה שהסידרה מתכנסת.)

**פתרון:** נסמן $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ אזי מכללי חשבון גבולות ומכך שכל תת סידרה מתכנסת לאותו הגבול נקבל ש־

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(L + \frac{5}{L}\right)$$

ולכן

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{5}{L}\right)$$

זאת אומרת הגבול $L$ מקיים את המשוואה

$$L^2 - 5 = 0.$$

הפתרונות של המשוואה הם: $L_1 = \sqrt{5}, L_2 = -\sqrt{5}$. קל להראות באינדוקציה ש־ $a_n \geq 0$ ולכן $L \geq 0$ מכאן ש־ $L = \sqrt{5}$.

2. (א) (7 נק') חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int (1+\cos(2x))\, e^{-3x} dx$$

**פתרון:**

$$\int (1+\cos(2x))\, e^{-3x} dx = \int e^{-3x} dx + \int \cos(2x) e^{-3x} dx$$

באינטגרל הראשון נציב $t=-3x$

$$\int e^{-3x} dx = \frac{-1}{3} \int e^{t} dt = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C$$

נסמן את האינטגרל $I = \int \cos(2x) e^{-3x} dx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים נקבל

$$I = -\frac{1}{3}\cos(2x) e^{-3x} - \frac{2}{3} \int \sin(2x) e^{-3x} dx$$

ושוב בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$\int \sin(2x) e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}\sin(2x) e^{-3x} + \frac{2}{3} \int \cos(2x) e^{-3x} dx$$

ולכן

$$I = -\frac{1}{3}\cos(2x) e^{-3x} + \frac{2}{9}\sin(2x)) e^{-3x} - \frac{4}{9} I$$

אחרי העברת אגפים ופישוט נקבל

$$I = \frac{1}{13}\left(2\sin(2x) - 3\cos(2x)\right) e^{-3x} + C$$

והתשובה הסופית היא:

$$\int (1+\cos(2x))\, e^{-3x} dx = \frac{1}{13}\left(2\sin(2x) - 3\cos(2x)\right) e^{-3x} - \frac{1}{3} e^{-3x} + C$$

(ב) (9 נק') חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\cos^3(x)dx.$$

**פתרון:** על ידי הצבה $\sin(x)=t$ נקבל:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\cos^3(x)dx = \int_0^1 t^{2n}(1-t^2)dt = \int_0^1 t^{2n}dt - \int_0^1 t^{2n+2}dt =$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\cos^3(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{3}{n})} = \frac{1}{2},$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכללי חשבון גבולות.

(ג) (9 נק') תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $f'(2)=5$, $f(2)=3$, $f(6)=\frac{1}{2}$.
נגדיר: $g(x)=\int_0^{xf(x)} f(t)dt$. חשבו את הנגזרת $g'(2)$.

**פתרון:** על פי המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי וכלל השרשרת נקבל

$$g'(x)=f(xf(x))\big(f(x)+xf'(x)\big)$$

**נציב** $x=2$:

$$g'(2)=f(2f(2))\big(f(2)+2f'(2)\big)$$

**נציב** $f(2)=3$, $f'(2)=5$

$$g'(2)=f(6)\,(3+10)=\frac{1}{2}\cdot 13=\frac{13}{2}.$$

(ד) (10 נק') חשבו את הנפח של גוף הסיבוב המתקבל ע"י סיבוב של התחום הנתון סביב ציר ה $X$:

$y \geq x^2, y \leq 2|x|$.

**פתרון:** הגוף מחולק לשני חלקים סימטריים סביב ציר $y$, משיקולי סימטריה

$$V = 2 \cdot \pi \int_0^2 (2x)^2 - (x^2)^2 dx =$$

$$= 2\pi \int_0^2 4x^2 - x^4 dx = 2\pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{128\pi}{15}$$

3. (א) (8 נק') הוכיחו שלמשוואה $1+x+e^x=0$ **קיים** פתרון ממשי **יחיד** .

**פתרון:**

תהי $f(x)=1+x+e^x$ אזי מתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, לכן בפרט קיים $x_1>0$ עבורו $f(x_1)>0$. כמו כן

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1+\lim_{x\to-\infty} x+\lim_{x\to-\infty} e^x=1-\infty+0=-\infty.$$

ולכן גם קיים $x_2<0$ עבורו $f(x_2)<0$.

$f$ רציפה ולכן ממשפט ערך הביניים קיימת נקודה $c$ בין $x_1$ ו־ $x_2$ עבורה $f(c)=0$.

עכשיו נשים לב ש־ $f'(x)=1+e^x>0$, לכן $f$ מונוטונית עולה ממש, ולכן חד־חד ערכית. מכאן שהנקודה $c$ הנ"ל היא הפתרון היחיד למשוואה $f(x)=0$.

(ב) (8 נק') נסמן ב־ $a$ את הפתרון היחיד של המשוואה מהסעיף הקודם. תהי

$$f(x)=\frac{xe^x}{1+x+e^x}.$$

מצאו את כל האסימפטוטות של $f$ (מותר להשתמש ב־ $a$ כחלק מתשובתכם בלי לחשב את ערכו).

**פתרון:** נחפש אסימפטוטה משופעת כאשר $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{-x}+\frac{x}{e^x}+1}=\frac{1}{0+0+1}=1$$

כאשר במעבר לפני האחרון השתמשנו בכללי חשבון גבולות ובגבול הבסיסי $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$. באופן דומה:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^x-x-x^2-xe^x}{1+x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-x^2}{1+x+e^x}=0$$

לחילופין ניתן לחשב את הגבולות האחרונים בעזרת כלל לופיטל. לכן $g(x)=x$ היא אסיפטוטה משופעת של $f$ כאשר $x\to\infty$.

נחפש אסימפטוטה משופעת כאשר $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+x+e^x}=0$$

כאשר השתמשנו בגבול $\lim_{x\to-\infty}=\lim_{t\to\infty}e^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=0$ ובכללי אריתמטיקה של גבולות. עכשיו:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{1+x+e^x}=^L\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)e^x}{1+e^x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^{-x}}=^L 0$$

כאשר השתמשנו פעמיים בכלל לופיטל ובכללי אריתמטיקה של גבולות. ולכן $y=0$ היא אסימפטוטה כאשר $x\to\infty$.

בנוסף, על פי הסעיף הקודם המכנה מתאפס אך ורק בנקודה $x=a$,

כאשר $a<0$. עבור $x<a$ המכנה שלילי ועבור $x>a$ המכנה חיובי והמכנה שואף לאפס כאשר $x\to a$ ואילו המונה שואף ל־ $ae^a<0$ כאשר $x\to a$. לכן:

$$\lim_{x\to a-}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to a+}f(x)=-\infty$$

ומכאן ש־ $x=a$

היא אסימפטוטה אנכית, ואין אסימפטוטות נוספות.

4. (10 נק') מבין כל זוגות המספרים הממשיים החיובים $a, b$ שמכפלתם 16 מצא את הזוג עבור הערך של $a + b^2$ הוא הקטן ביותר.

**פתרון:** נסמן $x = b$ אזי $a = \frac{16}{x}$

ואנחנו רוצים למצוא את המינימום של הפונקציה

$$f(x) = \frac{16}{x} + x^2,$$

כאשר

$x > 0$ (מכפלת המספרים חיובית ולכן לזוג המספרים יש אותו סימן)

$$f'(x) = -\frac{16}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 16}{x^2}$$

ולכן $f'(x) = 0$ רק כאשר $x = 8$. בקטע $0 < x < 8$ $f'(x) < 0$, ואילו עבור $x > 8$, $f'(x) > 0$. ולכן $x = 8$ הוא המינימום של הפונקציה, והתשובה הסופית היא הזוג $(8, 2)$.

5. (15 נק') עבור אילו ערכים של $a$ ממשי הפונקציה

$$f(x)=\left(e^{ax+1}+1\right)^2+x^2$$

קמורה כלפי מעלה?

**פתרון:** למדנו בכיתה שפווקציה גזירה פעמיים בעלת נגזרת שנייה חיובית היא קמורה כלפי מעלה.

נגזור את הפונקציה:

$$f'(x)=2\left(e^{ax+1}+1\right)\cdot a\cdot e^{ax+1}+2x=2ae^{2(ax+1)}+ae^{ax+1}+2x$$

ונגזור שוב על מנת למצוא את הנגזרת השנייה:

$$f''(x)=4a^2e^{ax+1}+a^2e^{ax+1}+2$$

נשים לב ש $f''(x)\geq 2>0$ לכל $a$ ממשי ולכל $x$ ממשי, ולכן $f$ קמורה כלפי מעלה לכל $a$ ממשי.

6. (10 נק') מצאו את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

כאשר $\mathbb{Q}$ היא קבוצת הרציונליים.

**פתרון:**

מתקיים ש־ $f(x) \geq 0$ לכל $x$ ממשי , ולכן כל המספרים האי־רציונליים וגם המספר אפס הם נקודות מינימום מוחלט של $f$, כי אילו המקומות שבהן $f$ מתאפסת.

אין ל־ $f$ נקודות מקסימום (מקומי או מוחלט), מכיוון שבכל קטע פתוח המכיל את $x_0$ קיים מספר רציונלי $x_1$ גדול מ־ $x_0$ ומספר רציונלי $x_2$ קטן מ־ $x_0$. $f(x_0) \leq x_0^2$

בהתאם לסימן של $x_0$. או ש־ $x_0^2 < x_1^2 = f(x_1)$

או ש־ $x_0^2 < x_2^2 = f(x_2)$.