אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה - סמסטר א' תשע"ד

חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) - מבחן מסכם, מועד א'

המרצים:
ד"ר נעה איידלשטין, ד"ר תם מאירוביץ , ד"ר דניאל מרקייביץ', ד"ר רועי קרקובסקי,
ד"ר אהובה שקוף.

תאריך: 27 בינואר 2014
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות בגודל A4, דו־צדדי (מודפס או בכתב יד). אין להשתמש במחשבון.

יש לענות על כל השאלות. מספר הנקודות הכולל במבחן הוא 100. עליכם לענות בפירוט על השאלות במקום המוקצה לתשובה. יש להסביר בעברית בצורה תמציתית וברורה מה אתם עושים ומדוע. יינתן ניקוד חלקי במקרים מתאימים.

אין להשתמש בעט אדום במבחן.

שימו לב: דפי הטיוטא ישלחו למגרסה.

בהצלחה!

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) (7 נק') $\lim_{x\to0^+}(\tan x)^{\frac{1}{\ln x}}$

$$\lim_{x\to0^+}(\tan(x))^{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\to0^+} e^{\ln(\tan(x))^{\frac{1}{\ln x}}} =$$

$$\overset{\text{רציפות}}{=} e^{\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(x)}\cdot\ln(\tan(x))\right)}$$

לופיטל $\frac{-\infty}{-\infty}$

כעת

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\tan(x))}{\ln(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\tan(x)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{x}{\tan(x)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)} =$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{x}{\tan(x)}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\cos^2(x)} = 1\cdot1 = 1$$

נימוק לזה כי:

לופיטל $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\tan(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x\to0^+}(\cos^2(x)) = 1.$$

לכן

$$\lim_{x\to0^+}(\tan(x))^{\frac{1}{\ln(x)}} = e^1 = \underline{\underline{e}}$$

(ב) (7 נק') $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{n^{3/2}}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{n^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

זהו סכום רימן של הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$

בקטע $[0,1]$ עם החלוקה $x_k=\frac{k}{n}$

$(k=0,1,\dots,n)$, כאשר הסכומים חלקים שווים

עם נקודת הקצה הימנית.

לכן

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\cdot\Delta x_k=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=$$

$$=\cancel{\left[\dots\right]}=\left[\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=$$

$$=\frac{2}{3}$$

2. (א) (7 נק') מצאו את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = (x+1)^{x+1} + \sqrt[3]{(12x+1)^8 + \cos x + 6}$ בנקודה $x = 0$.

נסמן:

$$g(x) = (x+1)^{x+1}$$

$$l(x) = \sqrt[3]{(12x+1)^8 + \cos x + 6}$$

נכתוב:

$$g(x) = e^{\ln((x+1)^{x+1})} = e^{(x+1)\ln(x+1)}$$

ואז

$$g'(x) = e^{(x+1)\ln(x+1)} \cdot \left(\ln(x+1) + \frac{(x+1)\cdot 1}{x+1}\right)$$

$$= e^{(x+1)\cdot\ln(x+1)} \cdot (\ln(x+1) + 1)$$

$$g'(0) = e^{1\cdot\ln(1)} \cdot (\ln(1)+1) = 1$$

$$l'(x) = \frac{1}{3}\left((12x+1)^8 + \cos(x) + 6\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(8(12x+1)^7 \cdot 12 - \sin(x)\right)$$

$$l'(0) = \frac{1}{3}(1 + \cos(0) + 6)^{-\frac{2}{3}} \cdot (8(1)\cdot 12 - \sin(0))$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right) \cdot (96) = 8$$

סה"כ,

$$f(x) = g(x) + l(x)$$

$$f'(x) = g'(x) + l'(x) \Rightarrow f'(0) = g'(0) + l'(0)$$

$$= 1 + 8 = 9$$

(ב) (9 נק') בדקו את ההתכנסות או התבדרות של האינטגרל $\int_1^{+\infty}(\sin x+2)e^{-x^2}\,dx$.

נוכיח תחילה ש-

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$$

מתכנס.

הוכחה:

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{l\to\infty}\int_1^{l} e^{-x}\,dx =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^{l} = \lim_{x\to\infty}\left(-e^{-l}+e^{-1}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

כמו כן ידוע ש- $(\sin(x)+2)\cdot e^{-x^2}$ חיובית בקטע $[1,\infty)$, ונשתמש במבחן ההתכנסות!

נראה כי

$$(\sin(x)+2)\cdot e^{-x^2} \le 3\cdot e^{-x}$$

ידוע ש- $-1\le\sin(x)\le 1$

ולכן $\sin(x)+2\le 3$

וגם כן $e^{-x^2}\le e^{-x}$ בקטע $[1,\infty)$.

(כי e^{x} מונוטונית עולה).

ולכן מכיוון ש- $\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$ מתכנס, אז $\int_1^{\infty} 3e^{-x}\,dx$ מתכנס, ולכן גם $\int_1^{\infty}(\sin(x)+2)\cdot e^{-x^2}$ מתכנס.

(ג) (9 נק') חשבו את האינטגרל $\int_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

נציב:

$x = 3\sin t$

$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$dx = 3\cos t\,dt$

כמו כן

$t=0 \Leftarrow x=0$

$\Leftarrow \frac{3}{2} = 3\sin t \Leftarrow x=\frac{3}{2}$

$t=\frac{\pi}{6} \Leftarrow \frac{1}{2} = \sin t$

ואז

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{9\sin^2 t\, 3\cos t}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{9\sin^2 t\, 3\cdot\cos t}{3\cos t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 9\sin^2(t)\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\,dt$$

$=$ כאשר נזכר כי

$$\int \sin^2(t)\,dt = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t)$$

ואז

$$9\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2(t)\,dt = 9\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= 9\left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - 9\left(0 - \frac{1}{4}\sin(0)\right) =$$

$$= \underline{\frac{9\pi}{12} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(ד) (10 נק') חשבו את הנפח של גוף הסיבוב המתקבל ע"י סיבוב של התחום הבא סביב ציר ה־x.

$$4 \le x \le 5, \qquad 0 \le y \le \sqrt{\frac{2x+12}{x^2-9}}$$

כנוסחא לחישוב נפח גוף סיבוב, יש לחשב את האינטגרל הבא:

$$\int_4^5 \pi \left(\sqrt{\frac{2x+12}{x^2-9}}\right)^2 dx =$$

$$\pi \int_4^5 \frac{2x+12}{x^2-9}\, dx$$

נעזר בפירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{2x+12}{x^2-9} = \frac{2x+12}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$$

~~את~~ ~~נחלק~~ נכפול את שני האגפים ב-$(x+3)(x-3)$ ונקבל

$$2x+12 = A(x-3) + B(x+3)$$

אז נציב $\underline{x=3}$ ונקבל

$$2\cdot 3+12 = B\cdot(3+3) \Rightarrow B=3$$

נמצא את A:

$$2x+12 = A(x-3)+3(x+3) \Rightarrow A=-1$$

סה"כ,

$$\frac{2x+12}{x^2-9} = \frac{3}{x-3} - \frac{1}{x+3}$$

נחזור לחישוב האינטגרל:

$$\int_4^5 \frac{2x+12}{x^2-9}\, dx = \Big[3\ln|x-3| - \ln|x+3|\Big]_4^5$$

$$= 3\ln(2) - \ln(8) - \big(3\cdot\ln(1) - \ln(7)\big) = \underline{\underline{\ln(7)}}$$

3. (א) (8 נק') הוכיחו כי הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הנתונה ע"י הנוסחא הבאה מקבלת מקסימום גלובלי ומצאו אותו.

$$f(x)=\frac{1}{|x|+1}+\frac{1}{|x-2|+1}$$

אם ל-f יש מקס גלובלי, אז הוא יתקבל בנק' אי-גזירות או בנק' קיצון בה הנגזרת מתאפסת. f גזירה בכל נקודה פרט לנקודות 0 ו-2 ומתקיים:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3-x} & x\le 0\\ \frac{1}{1+x}+\frac{1}{3-x} & 0<x<2\\ \frac{1}{1+x}+\frac{1}{x-1} & x\ge 2\end{cases}$$

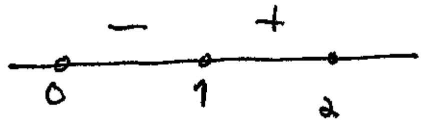
$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(3-x)^2}, & x<0\\ \frac{-1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(3-x)^2}, & 0<x<2\\ \frac{-1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}, & x>2\end{cases}$$

מכיוון שעבור $x<0$ הנגזרת תמיד חיובית (ושואפת ל-0) ועבור $x>2$ הנגזרת תמיד שלילית. לכן $f(x)\le f(0)$ לכל $x\le 0$, ו- $f(x)<f(2)$ לכל $x\ge 2$.

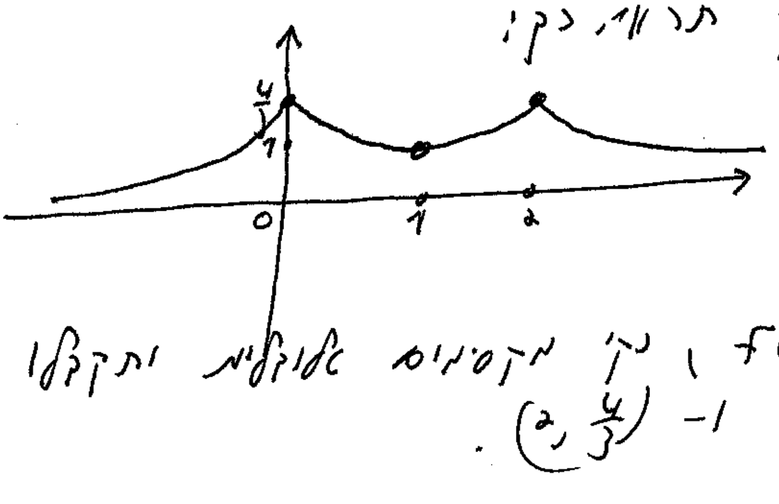
כעת נתבונן בקטע $[0,2]$ ...:

$$f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(3-x)^2}=\frac{8(x-1)}{(1+x)^2(3-x)^2}$$

לכן: $f'(1)=0$ ו- $(1,f(1))$ הוא נק' מינימום מקומית.



סקיצה של הגרף תראה כך:



מכיון ש- $f(0)=f(2)=\frac{4}{3}$, נק' מקסימום גלובליות יתקבלו בנקודות $(0,\frac{4}{3})$ ו- $(2,\frac{4}{3})$.

(ב) (8 נק') הוכיחו או הפריכו: לכל a ממשי קיים פתרון ממשי יחיד למשוואה $x^5+x=a$.

נראה- תחילה, קיים פתרון למשוואה: $x^5+x=a$. נסמן:

$f(x)=x^5+x-a$

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x^5+x-a)=\infty$ אז

(2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^5+x-a)=-\infty$

מ-(1) נובע שקיימת נקודה, $x_1\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_1)>0$, ומ-(2) נובע שקיימת נקודה, $x_2\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_2)<0$. ממשפט ערך הביניים בקטע $[x_1,x_2]$ (שימו לב $f(x)$ רציפה, בקטע זה) קיימת נקודה, $c\in\mathbb{R}$ שעבורה $f(c)=0$

ולכן c היא פתרון למשוואה.

נראה שהפתרון הוא יחיד.

$f'(x)=(x^5+x-a)'=5x^4+1>0$

כלומר: הנגזרת, $f(x)$ היא מונוטונית עולה ממש, ולכן חד חד-ערכית.

מהגדרת חד חד-ערכית נובע שלא קיים איבר ב-$\mathbb{R}$, פרט ל-c, שתמונתו של f היא אפס 0. ולכן הפתרון יחיד.

4. (10 נק') מצאו את הנקודות על הגרף של הפונקציה $y=\frac{1}{6}x^2$ שמרחקן מהנקודה $(0,4)$ הוא מינימלי.

תזכורת: המרחק בין הנקודות (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2) הוא $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

נקודה על גרף הפונקציה היא מהצורה $(x,\frac{1}{6}x^2)$.
נבנה פונקציית מרחק:

$$f(x)=\sqrt{(x-0)^2+\left(\frac{x^2}{6}-4\right)^2}=\sqrt{\frac{x^4}{36}-\frac{1}{3}x^2+16}$$

כדי למצוא את ערכי ה-x שעבורם המרחק מהנקודה $(0,4)$ הוא הקטן ביותר נחפש את נקודת המינימום של $f(x)$.

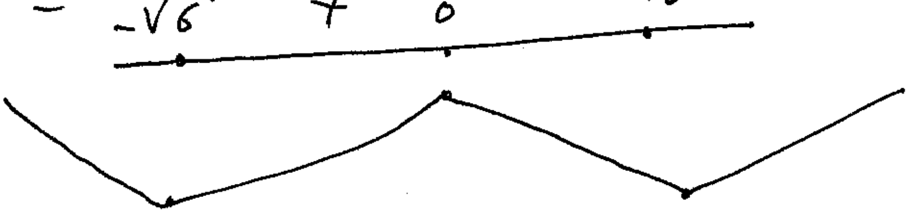
$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot\frac{x^3}{36}-\frac{2}{3}x}{\sqrt{\frac{x^4}{36}-\frac{1}{3}x^2+16}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{9}-\frac{2}{3}x=0 \Rightarrow x(x^2-6)=0$$

לכן לפונקציה שלוש נקודות קיצון:
$(0,0)$, $(-\sqrt{6},1)$, $(\sqrt{6},1)$.

מכיון שהנגזרת רציפה, תחומי העליה והירידה נקבעים לפי הנגזרת (טבלה)

$-\quad -\sqrt{6}\quad +\quad 0\quad -\quad \sqrt{6}\quad +$



מכיון שהפונקציה יורדת בקטע $(-\infty,-\sqrt{6})$ ועולה בקטע $(\sqrt{6},\infty)$, נקודות המינימום המוחלטות של הפונקציה מתקבלות בקטע $[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$ ובכן מתקבל
סה"כ נקבל שנקודות המינימום המוחלטות הן:
$(+\sqrt{6},1)$
$(-\sqrt{6},1)$ -1.

זכרו, עבור פונקציה גזירה בקטע (a,b) ומוגדרת ב-$[a,b]$ מינימום מוחלט מתקבל או בקצוות או בנקודות קיצון המוגדרות בתוכם.

5. (15 נק') הוכיחו ש־

$$\left|1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{6\cdot 2^3}+\frac{1}{24\cdot 2^4}-\sqrt{e}\right|<\frac{1}{100}.$$

לפי נוסחת טיילור עם שארית עבור הפונקציה e^x, לכל $x\in\mathbb{R}$ קיימת נקודה $c\in\mathbb{R}$ כך ש- $0\le c\le x$ ומתקיים:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$$

נציב עבור $n=4$ ו- $x=\frac{1}{2}$ נקבל:

$$e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\frac{1}{3!\cdot 2^3}+\frac{1}{4!\cdot 2^4}+\frac{e^c}{5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

כאשר c נקודה בין 0 ל- $\frac{1}{2}$

כעת כדי להוכיח את הטענה, יש להראות ש-

$$\left|\frac{e^c}{5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\right|\le\frac{1}{100}$$

מכיוון ש- e^x פונקציה עולה

$$e^c\le e^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{e^c}{5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\le\frac{e^{\frac{1}{2}}}{5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\le\frac{\sqrt{3}}{5!\cdot 2^5}=\frac{\sqrt{3}}{120\cdot 32}\le\overset{\text{ולכן}}{\frac{2}{3840}}<\frac{1}{100}$$

כיוון שהראנו מקודם, ש-

$e<3$

ולכן $\sqrt{e}<2$

6. (10 נק') הוכיחו או הפריכו: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונניח כי $|f(x)|\le x^2$ לכל $x\in\mathbb{R}$. אזי f גזירה בראשית.

תחילה, נשים לב ש-

$$|f(0)|\le 0^2 \Rightarrow |f(0)|=0$$

ולכן $f(0)=0$.

כעת נכתוב ש-

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

קיים. כדי להוכיח ש-f גזירה בנק' אפס.

מהנתון

$$|f(h)|\le h^2$$

נחלק את שני האגפים ב-$|h|$ ונקבל

$$\frac{|f(h)|}{|h|}=\left|\frac{f(h)}{h}\right|\le\frac{h^2}{|h|}=|h|$$

כלומר,

$$0\le\left|\frac{f(h)}{h}\right|\le|h|$$

כעת

$$\lim_{h\to 0}0=\lim_{h\to 0}|h|=0$$

ומכלל הסנדוויץ' נקבל:

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h}\right|=0$$

ולכן גם

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$$

כנדרש.