

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב – מחלקה למתמטיקה  
חדו"א להנדסת מכונות 1 (201-1-9711) סמסטר א' תשע"ו

תרגיל 10

בעיות מילוליות , קמירות קעירות , אסימפטוטות , חקירת פונקציה

1. נניח ש  $\alpha > 0$  ,  $\beta > 0$  הוכיחו שלכל  $x$  בקטע  $[0, 1]$  מתקיים

$$x^\alpha (1-x)^\beta \leq \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{(\alpha+\beta)^{(\alpha+\beta)}}$$

רמז : מצאו את המקסימום של הפונקציה המתאימה בקטע  $[0,1]$  .

2. מצאו את הגובה של החרוט בעל הנפח המקסימלי אשר אפשר לחסום

בכדור עם רדיוס  $R$  .

3. נתונות שלוש נקודות  $A, B, C$  כך ש  $\angle ABC = 60^\circ$

ו  $AB = 200$  ק"מ . מכונית יוצאת מ  $A$  ל  $B$  ונוסעת במהירות 80 קמ"ש.

באותו זמן רכבת יוצאת מ  $B$  ל  $C$  במהירות 50 קמ"ש . תוך כמה זמן

מתחילת התנועה המרחק בין המכונית לרכבת יהיה מינימלי ?

4. טיפת גשם עם מסה התחלתית  $m_0$  נופלת תחת השפעת כוח הכבדה ומתאדה כך

שהשינוי במסה פרופורציונלי לזמן ( מקדם הפרופורציה הוא  $K$  ) . כעבור כמה שניות

מתחילת הנפילה האנרגיה הקינטית של הטיפה תהיה מקסימלית ?

( התנגדות האוויר זניחה ) .

5. א) הוכיחו שלכל  $x$  בקטע  $[0, 1]$  מתקיים

$$\arcsin(x) + \arcsin(1-x) \geq \frac{\pi}{3}$$

5. ב) הוכיחו שלכל  $x > 1$

$$(x-1)^{(x-1)} + (x+1)^{(x+1)} \geq 2x^x$$

רמז: קמירות וקעירות.

6. גוף שמשקלו P שוכב על המישור האופקי L. מטרתנו היא להזיז את הגוף בעזרת כוח F. איזו זווית  $\varphi$  צריכה להיות בין F ל L כך שהערך של F יהיה מינימלי?

נתון כי כוח החיכוך G בין המישור לגוף הוא

$$G = k(P - F \sin(\varphi)) \quad (k \text{ מקדם החיכוך, מספר קבוע})$$

7. תהי

$$f(x) = \frac{\sqrt[100]{1+x^2} - 1}{x^2}$$

(א) האם יש ל f אסימפטוטה אנכית? נמק.

(ב) האם יש ל f אסימפטוטה אופקית? נמק.

(ג) האם יתכן שלגרף של פונקציה כלשהי

(1) יש אסימפטוטות שונות ב:  $+\infty$  וב:  $-\infty$ ? נמקו.

(2) יש אסימפטוטה ב:  $+\infty$  ואין אסימפטוטה ב:  $-\infty$ ? נמקו.

(ד) האם יתכן שלגרף של פונקציה כלשהי יש אסימפטוטה אנכית מימין בנקודה מסוימת ואין אסימפטוטה אנכית משמאל באותה הנקודה?

תנו דוגמאות לסעיפים ג, ד.

8. עבור הפונקציות הבאות מצאו תחום ההגדרה, אסימפטוטות במידה וקיימות,

נקודות קיצון מקומיות, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות.

שרטטו סקיצה של הגרף.

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} \quad (\alpha)$$

$$f(x) = x + \frac{\ln(x)}{x} \quad (\text{a})$$

$$f(x) = 0.5\sin(2x) + \cos(x) \quad (\text{a})$$

$$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} \quad (\text{a})$$

$$f(x) = 3x e^x \quad (\text{a})$$

$$f(x) = x + \sin(x) \quad (\text{a})$$

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{\sin(x)} \quad (\text{a})$$

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{1+x^2} \quad (\text{a})$$